



# **Analitička geometrija i linearna algebra**

Udžbenik sa zbirkom zadataka

Anton Vrdoljak



ANTON VRDOLJAK

ANALITIČKA GEOMETRIJA I  
LINEARNA ALGEBRA

– udžbenik sa zbirkom zadataka –

**Nakladnik:** Sveučilište u Mostaru



**Za nakladnika:** prof. dr. sc. Ivo Čolak, [rektor](#)

**Autorsko pravo:** © 2026 ANTON VRDOLJAK. [Sva prava pridržana.](#)

**Recenzenti:**  
prof. dr. sc. Damir Vukičević  
prof. dr. sc. Ljiljanka Kvesić  
doc. dr. sc. Marina Zubac

**E–udžbenik** je napisan s pomoću softvera [L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X](#).

**L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X predložak:** *The Legrand Orange Book* (Mathias Legrand).

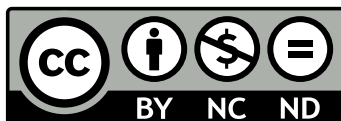
**Crteže** je izradio autor s pomoću grafičkog paketa [TikZ](#) te programskog jezika [Python](#).

**Naslovnica** je stvorena s pomoću [alata umjetne inteligencije](#) pri servisu [getimg.ai](#).

**I. izdanje**, 2026.

**CIP zapis** dostupan u [COBISS](#) sistemu Nacionalne i univerzitetske biblioteke BiH pod [ID brojem](#) 70775302.

**ISBN (e-knjiga):** 978-9926-28-176-2



Ova publikacija je dostupna pod međunarodnom licencom CC BY-NC-ND 4.0, koja omogućuje njezino preuzimanje i dijeljenje, uz [obvezno](#) navođenje autora. Komercijalna prodaja ili korištenje nisu dozvoljeni. Prerada, izmjena ili integracija u druga djela nisu dopuštene.

ANTON VRDOLJAK

ANALITIČKA GEOMETRIJA I  
LINEARNA ALGEBRA  
– udžbenik sa zbirkom zadataka –



MOSTAR, 2026.



*Budućim inženjerima – onima koji matematikom –  
najmoćnijom i najljepšom tvorevinom ljudskog duha –  
već oblikuju rješenja i onima koji je još usvajaju –  
neka im ovaj udžbenik bude čvrst temelj za gradnju znanja  
i pouzdan oslonac u inženjerskom promišljanju.*



# Uvodnik

Ovaj udžbenik sa zbirkom zadataka iz **Analitičke geometrije i linearne algebre** namijenjen je studentima prve godine svih tehničkih fakulteta u okviru prvog ciklusa sveučilišnih studija Sveučilišta u Mostaru. Sadržajno je usklađen s nastavnim planovima i programima koji obuhvaćaju temeljne matematičke koncepte linearne algebre i analitičke geometrije neophodne za razumijevanje i primjenu u inženjerskim i tehničkim disciplinama. Dodatno, osmišljen je tako da bude prikladan i za samostalni rad studenata.

Na početku svakoga poglavlja naveden je **ne baš tako kratak osvrt** na najvažnije definicije i teoreme, pri čemu su dokazi izostavljeni. Udžbenik je strukturiran u **pet** tematskih cjelina:

1. **Vektorska algebra** – U uvodnom dijelu obrađeni su osnovni pojmovi i operacije s vektorima, koji čine temelj za daljnje proučavanje geometrijskih i algebarskih struktura.
2. **Analitička geometrija prostora  $E^3$**  – U ovom poglavlju proučavaju se točke, pravci i ravnine u našem standardnom trodimenzionalnom prostoru, s posebnim naglaskom na njihovu međusobnu geometrijsku interpretaciju i algebarsko modeliranje.
3. **Matrice i determinante** – Poglavlje daje pregled osnovnih svojstava matrica i determinanti, koje predstavljaju ključne alate u algebarskom pristupu rješavanju sustava linearnih jednadžbi i definiranju linearnih transformacija.
4. **Linearni sustavi** – Fokus je na metodama rješavanja sustava linearnih jednadžbi, uključujući Gaussovu eliminaciju, Cramerovo pravilo i teoriju rješenja.
5. **Linearni prostori i linearni operatori** – U završnom dijelu udžbenika obrađuju se apstraktni koncepti linearne algebre, uključujući baze, dimenziju, linearno nezavisne skupove, svojstvene vrijednosti i dijagonalizaciju linearnih operatora.

U ovom udžbeniku vektori se označavaju na više standardnih načina, ovisno o **kontekstu**: podebljanim slovima (npr.  $\mathbf{x}$ ), strelicom iznad slova (npr.  $\vec{x}$ ), običnim slovima (npr.  $v$ ) kada je njihova priroda jasno određena kontekstom, te matricnim zapisom u obliku stupčanih ili retčanih matrica.

**Zbirka**, kao sastavni dio ovog udžbenika, sadrži pažljivo odabrane i postupno složene zadatke koji studentima omogućuju sustavno usvajanje gradiva i razvijanje **vještina** potrebnih za rješavanje konkretnih problema. Uz svako poglavlje nalaze se zadaci različitih razina složenosti, od temeljnih primjera do izazovnijih problema namijenjenih **dubljem** razumijevanju teorije.

Posebna pozornost posvećena je zadacima koji proizlaze iz **inženjerske prakse**. Primjeri iz tehničkih i primijenjenih područja omogućuju studentima da povežu matematičku teoriju s realnim problemima, čime se dodatno potiče razumijevanje i motivacija za učenje.

Na kraju udžbenika priložen je popis korištene literature, kazalo imena te kazalo pojmova, što olakšava snalaženje i dodatno produbljuje korisničko iskustvo.

Nadam se kako će ova uspješno sastavljena e-kolekcija s **44** riješena primjera i **372** zadatka poslužiti studentima kao koristan **alat** pri učenju, razumijevanju i praktičnoj primjeni analitičke geometrije i linearne algebre, odnosno dobra **referenca** ili **priručnik** za pripremu ispita.

Hvala svima ♥ koji su pomogli i podržali izdavanju ovog udžbenika sa zbirkom zadataka. Posebno zahvaljujem recenzentima ♥ na brojnim korisnim primjedbama i sugestijama.

Autor





## Sadržaj

|          |                                                              |           |
|----------|--------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Vektorska algebra</b> .....                               | <b>11</b> |
| 1.1      | Osnovni pojmovi o vektorima                                  | 11        |
| 1.2      | Zbrajanje vektora                                            | 13        |
| 1.3      | Množenje vektora skalarom                                    | 15        |
| 1.4      | Linearna (ne)zavisnost vektora                               | 15        |
| 1.5      | Baza i koordinatizacija prostora $\mathbb{V}^3$              | 16        |
| 1.6      | Skalarni produkt vektora                                     | 18        |
| 1.7      | Vektorski produkt vektora                                    | 20        |
| 1.8      | Mješoviti produkt vektora                                    | 23        |
| 1.9      | Zadaci                                                       | 26        |
| <b>2</b> | <b>Analitička geometrija prostora <math>E^3</math></b> ..... | <b>47</b> |
| 2.1      | Osnovni pojmovi i formule                                    | 47        |
| 2.2      | Ravnina u prostoru $E^3$                                     | 50        |
| 2.3      | Pravac u prostoru $E^3$                                      | 58        |
| 2.4      | Međusobni položaj pravaca i ravnina u prostoru $E^3$         | 63        |
| 2.5      | Zadaci                                                       | 66        |
| <b>3</b> | <b>Matrice i determinante</b> .....                          | <b>99</b> |
| 3.1      | Osnovni pojmovi o matricama                                  | 99        |

|          |                                                               |            |
|----------|---------------------------------------------------------------|------------|
| 3.2      | Operacije s matricama                                         | 101        |
| 3.3      | Regularne matrice i Gaussov algoritam za invertiranje matrice | 105        |
| 3.4      | Matrične jednačbe                                             | 108        |
| 3.5      | Pojam determinante. Osnovna svojstva                          | 109        |
| 3.6      | Matričin rang                                                 | 114        |
| 3.7      | Svojstvene vrijednosti i vektori                              | 117        |
| 3.8      | Zadaci                                                        | 122        |
| <b>4</b> | <b>Linearni sustavi</b>                                       | <b>139</b> |
| 4.1      | Osnovni pojmovi o linearnim sustavima                         | 139        |
| 4.2      | Rješavanje općenitog linearnog sustava                        | 140        |
| 4.3      | Rješavanje kvadratnog linearnog sustava                       | 145        |
| 4.4      | Homogeni linearni sustavi                                     | 146        |
| 4.5      | Zadaci                                                        | 149        |
| <b>5</b> | <b>Linearni prostori i linearni operatori</b>                 | <b>173</b> |
| 5.1      | Linearni prostori                                             | 173        |
| 5.2      | Linearni operatori                                            | 177        |
| 5.3      | Algebra operatora                                             | 179        |
| 5.4      | Spektar operatora                                             | 181        |
| 5.5      | Primjeri operatora u ravnini i prostoru                       | 185        |
| 5.6      | Zadaci                                                        | 187        |
|          | <b>Literatura</b>                                             | <b>203</b> |
|          | <b>Kazalo imena</b>                                           | <b>205</b> |
|          | <b>Kazalo pojmova</b>                                         | <b>207</b> |



# 1. Vektorska algebra

## 1.1 Osnovni pojmovi o vektorima

**Skalarne i vektorske veličine.** Veličine kojih vrijednosti možemo izraziti **samo** pozitivnim ili negativnim brojevima (skalarima) nazivamo *skalarmim* (duljina, površina, volumen, temperatura, masa, specifična gustoća, tlak, naboj, energija, itd.); veličine pak kojih se vrijednosti određuju kako dimenzijama, tako i smjerom u prostoru, nazivamo *vektorskim* (sila, brzina, jakost električnog i magnetskog polja, itd.) i možemo ih predočiti *vektorima*.

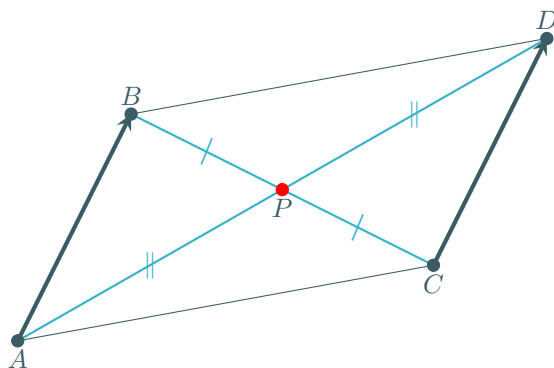
**Usmjerena dužina i vektor.** Neka je s  $E^3$  označen naš standardni (euklidski), trodimenzionalni prostor (dvodimenzionalni euklidski prostor, tj. ravninu, označavamo s  $E^2$ ) za koji pretpostavljamo da ima točkovnu strukturu ( $E^3$  je skup svih točaka trodimenzionalnog prostora). Svaki uređeni par  $(A, B)$  točaka  $A$  i  $B$  iz prostora  $E^3$  nazivamo *usmjerenom* (ili *orijentiranom*) *dužinom* i označujemo s  $\overrightarrow{AB}$ . Pritom za točku  $A$  kažemo da je *početak*, a za točku  $B$  da je *kraj* (ili *šiljak*) usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$ . Lako je uočiti kako  $\overrightarrow{AB}$  **nije isto** što i  $\overrightarrow{BA}$ . *Duljina*  $|\overrightarrow{AB}|$  usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$  definirana je kao udaljenost točaka  $A$  i  $B$  ( $|\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$ ).

Za usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  reći ćemo da su *ekvivalentne* (ili *slične*) i pisati  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ , ako se dužine  $\overrightarrow{AD}$  i  $\overrightarrow{BC}$  međusobno raspolavljaju, odnosno ako dužine  $\overrightarrow{AD}$  i  $\overrightarrow{BC}$  imaju **zajedničko** polovište. Primjer dviju ekvivalentnih usmjerenih dužina prikazan je Slikom 1.1. Nije teško dokazati kako je relacija  $\sim$  **istovjetna** (ekvivalentna) sljedećim zahtjevima:

- dužine  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$  su paralelne ( $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ),
- dužine  $\overrightarrow{AC}$  i  $\overrightarrow{BD}$  su paralelne ( $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{BD}$ ),
- dužine  $\overrightarrow{AC}$  i  $\overrightarrow{BD}$  imaju jednake duljine ( $d(A, C) = d(B, D)$ ),
- točke  $A, B, C$  i  $D$  čine paralelogram.

Nadalje, lako se provjeri kako je  $\sim$  **razredbena relacija** (relacija ekvivalencije) na skupu svih usmjerenih dužina, pa se taj skup cijepa na pripadajuće **disjunktno** razrede (klase ekvivalencije). Razred ekvivalencije određen nekom usmjerenom dužinom  $\overrightarrow{AB}$  označavamo s  $[\overrightarrow{AB}]$ , tj.

$$[\overrightarrow{AB}] = \{ \overrightarrow{PQ} \in E^3 \times E^3 \mid \overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB} \}.$$



**Slika 1.1:** Ekvivalentne usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{CD}$ .

Svaki ekvivalencijski razred po relaciji  $\sim$  na skupu svih usmjerenih dužina nazivamo *vektorom*<sup>1</sup>. Skup svih vektora označujemo s  $\mathbb{V}^3$ , a njegove elemente (vektore) uobičajeno je označavati malim pisanim latiničnim slovima sa strelicom:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ . Nadalje, svaki član ekvivalencijskog razreda promatranog vektora, odnosno svaki član u ekvivalencijskom razredu koji generira neki vektor, naziva se *predstavnikom* (ili *reprezentantom*) tog vektora (svaki vektor se može predočiti pomoću više različitih članova ekvivalencijskog razreda – predstavnika vektora). Za osnovni odnos između točaka iz prostora  $E^3$  i vektora **vrijedi**:

! Za svaku točku  $A$  u prostoru  $E^3$  i svaki vektor  $\vec{a}$  iz  $\mathbb{V}^3$  postoji **jedna i samo jedna** točka  $B$  takva da je usmjerena dužina  $\overrightarrow{AB}$  element ekvivalencijskoga razreda  $\vec{a}$ .

**Radij–vektor točke.** Neka je  $O \in E^3$  bilo koja zadana točka. Neka je s  $\mathbb{V}^3(O)$  označen skup svih usmjerenih dužina koje imaju početak u točki  $O$ , tj.

$$\mathbb{V}^3(O) = \{ \overrightarrow{OX} \mid X \in E^3 \}.$$

Svaki element skupa  $\mathbb{V}^3(O)$  nazivamo *radij–vektor* u točki  $O$  i pišemo kraće  $\overrightarrow{OX} = \vec{r}_X$ . Skup  $\mathbb{V}^3(O)$  nazivamo i *prostor radij–vektora*. U pravilu, (čvrsta) točka  $O$  će biti ishodište zadanog pravokutnog koordinatnog sustava u prostoru.

**Jednakost vektora.** S geometrijske točke gledišta nije teško uočiti kako je vektor **jednoznačno** određen ako mu je poznata:

- *duljina* (modul, norma, jakost ili intezitet), odnosno duljina nekog predstavnika<sup>2</sup> tog vektora, tj. udaljenost njegovih krajnjih točaka ( $|\vec{a}| = a = |\overrightarrow{AB}| = d(A, B)$ ),
- *smjer*, tj. svaki pravac na kojem leži neka usmjerena dužina<sup>3</sup> koja je predstavnik tog vektora (ovaj pravac se još naziva i *nosač*),
- *orijentacija*, tj. poredak krajnjih točaka usmjerene dužine na nosaču (za vektore  $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$  i  $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$  s istim smjerom kažemo da su **iste orijentacije** ako točke  $A$  i  $B$  leže s iste strane točke  $O$  na pravcu, dok u suprotnom kažemo da su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  **suprotne orijentacije**).

Za dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  kažemo da su **jednaki** ili **ekvivalentni** ako se **samo** translacijom mogu dovesti u položaj da im se istovremeno podudaraju početne i krajnje točke njihovih predstavnika. Dodatno, očito je da su dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  jednaki ako imaju **istu** duljinu, smjer i orijentaciju.

<sup>1</sup> U tekstu ćemo radi jednostavnosti ponekad poistovjećivati vektor i usmjerenu dužinu, iako su to pojmovno različiti objekti.

<sup>2</sup> Duljina vektora **ne ovisi** o izabranoj usmjerenoj dužini što predočuje vektor.

<sup>3</sup> Također je očito da smjer vektora **ne ovisi** o izboru predstavnika.

**Nul–vektor.** Za svaku točku  $A$  u prostoru  $E^3$ , vektor  $\vec{AA}$  nazivamo *nul–vektorom* i označujemo s  $\vec{0}$ . Dakle, nul–vektor je vektor čiji predstavnik ima početak i kraj (šiljak) u istoj točki. To je jedini vektor kojemu smjer i orijentacija nisu određeni, dok je očito  $|\vec{0}| = 0$ .

**Jedinični vektor.** Svaki vektor  $\vec{e} \in \mathbb{V}^3$  duljine 1, tj.  $|\vec{e}| = 1$ , nazivamo *jediničnim vektorom*. Jedinični vektor, kojemu se smjer i orijentacija podudaraju sa smjerom i orijentacijom proizvoljnog vektora  $\vec{a} \neq \vec{0}$  iz  $\mathbb{V}^3$  naziva se jedinični vektor vektora  $\vec{a}$ , i označuje se sa  $\vec{a}_0$ . Dakle, jedinični vektor  $\vec{a}_0$  vektora  $\vec{a} \neq \vec{0}$  iz  $\mathbb{V}^3$  je vektor koji ima isti smjer i orijentaciju kao i vektor  $\vec{a}$ , ali je duljine jedan. Sada, bilo koji vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  iz  $\mathbb{V}^3$  možemo izraziti u obliku:  $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0$ .

**Kolinearni i komplanarni vektori.** Za vektore iz  $\mathbb{V}^3$  kažemo da su *kolinearni* ako imaju isti smjer (tj. njihovi predstavnici leže na istom ili paralelnim pravcima), dok im duljina i orijentacija mogu biti proizvoljni. Nul–vektor je kolinearan sa svakim vektorom. Ako su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  kolinearni, možemo odabrati točke  $O$ ,  $A$  i  $B$  koje leže na istom pravcu takve da vrijedi  $\vec{a} = \vec{OA}$  i  $\vec{b} = \vec{OB}$ . Za vektore iz  $\mathbb{V}^3$  kažemo da su *komplanarni* ako leže u jednoj ili paralelnim ravninama. Kolinearni vektori su uvijek i komplanarni. Nadalje, bilo koja dva vektora iz  $\mathbb{V}^3$  su komplanarna.

**Kut između vektora.** Neka su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  različiti od nul–vektora, i neka su  $\vec{OA}$  i  $\vec{OB}$  njihovi predstavnici s početkom u istoj čvrstoj točki  $O$ . Kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  definiramo kao kut između njihovih predstavnika, tj. vrijedi:

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}).$$

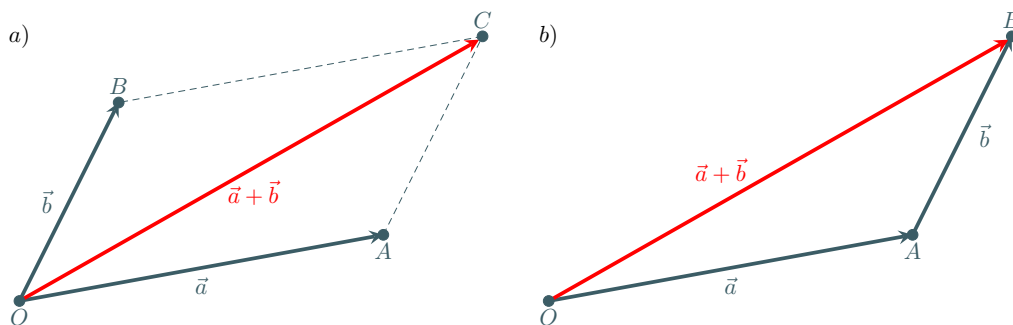
Ako je  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ , kažemo da su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  *okomiti* i pišemo  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

## 1.2 Zbrajanje vektora

**Zbroj vektora.** Vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  možemo zbrajati na dva načina. Prvi način za zbrajanje vektora je “pravilo paralelograma” i prikazano je Slikom 1.2 a). Dakle, neka su zadani vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$ . Tada odaberemo neku proizvoljnu čvrstu točku prostora  $O$ , te odredimo točke  $A$  i  $B$  takve da je  $\vec{a} = \vec{OA}$  i  $\vec{b} = \vec{OB}$ . Zatim konstruiramo paralelogram  $OACB$  sa stranicama  $\vec{OA}$  i  $\vec{OB}$ . Vektor  $\vec{OC}$  predstavlja *zbroj vektora*  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  što zapisujemo kao:  $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Drugi način za zbrajanje vektora je “pravilo trokuta” i prikazano je Slikom 1.2 b). Dakle, neka su zadani vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  i točke  $O$ ,  $A$  i  $B$  iz  $E^3$  takve da je  $\vec{a} = \vec{OA}$ ,  $\vec{b} = \vec{AB}$ . Zbroj vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je vektor  $\vec{c} = \vec{OB}$ , i pišemo:  $\vec{c} = \vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Zbroj tri vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  iz  $\mathbb{V}^3$  definira se kao vektor  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ . Na isti način možemo definirati i zbroj od četiri i više vektora iz  $\mathbb{V}^3$ .



Slika 1.2: Zbrajanje vektora: a) pravilo paralelograma, b) pravilo trokuta.

Zbrajanje vektora iz  $\mathbb{V}^3$  ima sljedeća svojstva:

- (Z1)  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ , (asocijativnost)  
 (Z2)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ , (komutativnost)  
 (Z3) za svaki vektor  $\vec{a}$  vrijedi  
 $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ , (postojanje neutralnog elementa)  
 (Z4) za svaki vektor  $\vec{a}$  postoji njemu *suprotan*<sup>4</sup>  
 vektor  $-\vec{a}$  takva da je  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ , (postojanje suprotnog elementa)  
 (Z5)  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ , (nejednakost trokuta<sup>5</sup>)

za svaki  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$ . Za dva vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  definiramo njihovu *razliku* kao zbroj vektora  $\vec{a}$  i  $-\vec{b}$  (dijagonala  $\overrightarrow{BA}$  paralelograma na Slici 1.2 a), tj. vrijedi:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

### Primjer 1.1

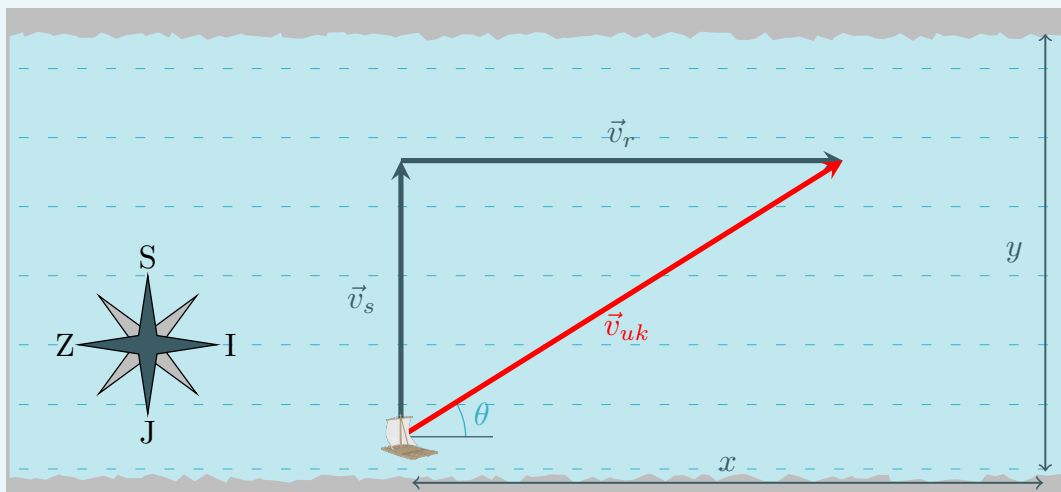
Rijeka protječe kroz neki grad u smjeru zapad–istok. Brzina rijeke iznosi  $1.2 \text{ m s}^{-1}$ , a njezina širina je  $y = 500 \text{ m}$ . Brzina splavi, koja prelazi rijeku okomito na njezin tok, iz smjera juga, iznosi  $0.75 \text{ m s}^{-1}$ . Odrediti iznos vektora brzine splavi u odnosu na obalu. U kojem smjeru plovi splav? Koliko će metara rijeka nizvodno “odnijeti” splav?

### Rješenje.

Uz oznaku  $\vec{v}_s$  za vektor brzine splavi u odnosu na rijeku, splav plovi u smjeru vektora  $\vec{v}_{uk} = \vec{v}_s + \vec{v}_r$ . Vektori  $\vec{v}_s$ ,  $\vec{v}_r$  i  $\vec{v}_{uk}$  čine jedan **pravokutan** trokut, s **katetama**  $\vec{v}_s$  i  $\vec{v}_r$ , pa vrijedi:

$$v_{uk}^2 = v_s^2 + v_r^2 \Rightarrow v_{uk} = \sqrt{v_s^2 + v_r^2} \approx 1.415 \text{ m s}^{-1},$$

$$\tan \theta = \frac{v_s}{v_r}, \quad x = \frac{y}{\tan \theta} = 800 \text{ m}.$$



<sup>4</sup> Suprotan vektor svakog vektora iz  $\mathbb{V}^3$  je jedinstven. Ako je  $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ , onda je  $-\vec{a} = [\overrightarrow{BA}]$ . Vektori  $\vec{a}$  i  $-\vec{a}$  imaju isti smjer i jednaku duljinu, dok su im orijentacije suprotne.

<sup>5</sup> U svakom trokutu je duljina jedne njegove stranice manja od zbroja duljina preostale dvije stranice.

### 1.3 Množenje vektora skalarom

**Množenje vektora skalarom.** Množimo li vektor  $\vec{a}$  iz  $\mathbb{V}^3$  nulom, rezultat je nul-vektor. Množenje tog vektora realnim brojem  $\lambda \neq 0$  daje vektor  $\lambda \vec{a}$  sa sljedećim svojstvima:

- duljina mu je jednaka duljini vektora  $\vec{a}$  pomnoženoj s  $|\lambda|$ ,
- smjer mu je jednak smjeru vektora  $\vec{a}$ ,
- orijentacija mu je jednaka orijentaciji vektora  $\vec{a}$  za  $\lambda > 0$ , a suprotna orijentaciji vektora  $\vec{a}$  za  $\lambda < 0$ .

Nadalje, lako je provjeriti kako je  $\lambda \vec{a} = \vec{0}$  **onda i samo onda**, ako je  $\lambda = 0$  ili  $\vec{a} = \vec{0}$ , kao i da ćemo množenjem vektora  $\vec{a} \neq \vec{0}$  recipročnom vrijednošću njegove duljine dobiti jedinični vektor vektora  $\vec{a}$  ( $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$ ). Dodatno, iz definicije umnoška realnog broja  $\lambda \neq 0$  i vektora  $\vec{a} \neq \vec{0}$  slijedi kako su vektori  $\vec{a}$  i  $\lambda \vec{a}$  **kolinearni**. Vrijedi i obrat, odnosno ovaj važan teorem:

! Ako su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  kolinearni i ako je  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , onda **postoji jedinstveni** skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da je  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ .

Množenje vektora iz  $\mathbb{V}^3$  skalarom ima sljedeća osnovna svojstva:

- |                                                                         |                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| (S1) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ , | (distributivnost prema zbrajanju vektora)                                      |
| (S2) $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ ,        | (distributivnost prema zbrajanju skalara)                                      |
| (S3) $(\lambda \mu) \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$ ,                   | (kvaziasocijativnost)                                                          |
| (S4) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ,                                      |                                                                                |
| (S5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ,                                      | (netrivijalnost množenja)                                                      |
| (S6) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ,                                  | za svaki $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}^3$ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . |

### 1.4 Linearna (ne)zavisnost vektora

**Linearna kombinacija vektora.** Operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom daju nam mogućnost stvarati linearne kombinacije vektora iz  $\mathbb{V}^3$ . Neka su zadani vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  iz  $\mathbb{V}^3$  i realni brojevi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . *Linearnom kombinacijom* vektora  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  nazivamo vektor oblika:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k.$$

Nije teško uočiti kako jedna linearna kombinacija vektora  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  iz  $\mathbb{V}^3$  (od beskonačno mnogo različitih linearnih kombinacija) uvijek daje nul-vektor neovisno o vektorima  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ , a to je **trivijalna** kombinacija:

$$0 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{a}_k \quad (= \vec{0}).$$

**Linearna (ne)zavisnost vektora.** Vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  iz  $\mathbb{V}^3$  su *linearno nezavisni* ako **za sve** skalare  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0. \quad (1.1)$$

U protivnom su vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  *linearno zavisni*. Drugim riječima, vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  iz  $\mathbb{V}^3$  su linearno zavisni **akko**<sup>6</sup> postoje skalari  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  takvi da je:

$$\lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{a}_k = \vec{0},$$

pri čemu je **barem jedan** od skalara  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  **različit od nule**, odnosno  $\sum_{i=1}^k |\lambda_i| > 0$ .

<sup>6</sup> Pokratak **akko** u daljnjem tekstu zamjenjuje izraz “ako i samo ako”.

Dakle, pitanje linearne nezavisnosti vektora iz  $\mathbb{V}^3$  je pitanje postojanja (egzistencije) netrivialne linearne kombinacije tih vektora koja daje nul-vektor. Ako **jedino** trivijalna kombinacija nekih vektora  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  iz  $\mathbb{V}^3$  daje nul-vektor, onda su vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  linearno nezavisni. Ako postoji netrivialna linearna kombinacija vektora  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  iz  $\mathbb{V}^3$  koja daje nul-vektor, onda su vektori  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$  linearno zavisni. Štoviše, linearna zavisnost nekog skupa vektora iz  $\mathbb{V}^3$  znači i da je barem jedan od tih vektora linearna kombinacija preostalih. Ako je na primjer  $\lambda_1 \neq 0$ , tada je:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k.$$

Nadalje, neka su  $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{V}^3$  dva nekolinearna vektora, a  $\vec{a}_3 \in \mathbb{V}^3$  bilo koji vektor s njima komplanaran. Onda postoje i **jednoznačno** su određeni skalari  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  takvi da je:

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2.$$

Slično, neka su  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{V}^3$  tri nekomplanarna vektora. Ako je  $\vec{a}_4 \in \mathbb{V}^3$  bilo koji vektor, onda postoje i **jednoznačno** su određeni skalari  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$  sa svojstvom da je:

$$\vec{a}_4 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.$$

Ukratko, svaka tri komplanarna vektora, kao i svaka četiri vektora, te svaka dva kolinearna vektora iz  $\mathbb{V}^3$  su linearno zavisna. Slično, svaka dva **nekolinearna** vektora i svaka tri **nekomplanarna** i **nekolinearna** vektora su linearno **nezavisna**.

## 1.5 Baza i koordinatizacija prostora $\mathbb{V}^3$

**Baza prostora  $\mathbb{V}^3$ .** Svaki skup  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  od tri linearno nezavisna vektora iz  $\mathbb{V}^3$  nazivamo *baza* (*koordinatna baza* ili *koordinatni sustav*) prostora  $\mathbb{V}^3$ . Vektore  $\vec{a}_i$  iz baze zovemo *koordinatni vektori*. Ugrubo, baza prostora  $\mathbb{V}^3$  je skup s najmanjim brojem vektora iz  $\mathbb{V}^3$  takav da se svi ostali vektori ovog prostora mogu, na **jedinstven** način, prikazati kao linearna kombinacija vektora baze. Potrebno je naglasiti kako baza prostora  $\mathbb{V}^3$  **nije** jedinstvena.

**Koordinatizacija prostora  $\mathbb{V}^3$ .** Prema osnovnom svojstvu baze  $B = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  prostora  $\mathbb{V}^3$  svaki vektor  $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$  ima jedinstveni prikaz oblika:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.$$

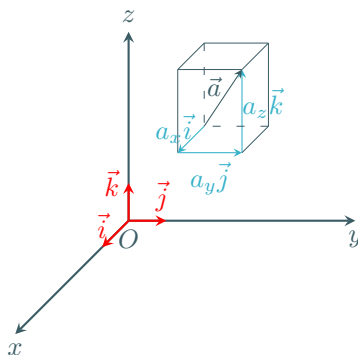
Dakle, jednoznačnost gornjeg prikaza dozvoljava nam oblikovati preslikavanje  $k : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definirano s:

$$k(\vec{a}) = k(\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

koje nazivamo *koordinatizacija* prostora  $\mathbb{V}^3$  (u odnosu na bazu  $B$ ). Preslikavanje  $k$  je **bijekcija**. Prema tome, vektori su **karakterizirani** uređenim trojkama realnih brojeva! Ako je

$$k(\vec{a}) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

brojeve  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  zovemo *koordinate* vektora  $\vec{a}$  u odnosu na zadanu bazu  $B$  (jedan te isti vektor u različitim bazama ima različite koordinate), a uređenu trojku  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  *koordinatni slog* tog vektora. Izbor baze prostora  $\mathbb{V}^3$  (pri paralelnom pomaku predstavnika vektora njegove koordinate se ne mijenjaju) omogućuje nam da operacije s vektorima “prevedemo” na operacije s njihovim



**Slika 1.3:** Pravokutne (Kartezijske) koordinate nekog vektora  $\vec{a}$  iz  $\mathbb{V}^3$ .

koordinatama u toj odabranoj bazi (operacije s vektorima je puno “zgodnije”, štoviše “isplativije”, provoditi računski, nego grafički).

Bilo kojom točkom  $O$  euklidskog prostora  $E^3$  i uređenom trojkom  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  nekomplanarnih vektora iz  $\mathbb{V}^3$  određen je jedan koordinatni sustav  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  u prostoru  $E^3$ . Ako su vektori  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  **jedinični** i leže na **međusobno okomitim** pravcima, onda  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  nazivamo *pravokutnim* ili *Kartezijskim* (prema Cartesius, latiniziranom imenu R. Descartesa<sup>7</sup>) *koordinatnim sustavom* s ishodištem<sup>8</sup> u točki  $O$ . Nadalje, pravci koji prolaze točkom  $O$  i na kojima leže međusobno okomiti jedinični vektori  $\vec{i}, \vec{j}$ , i  $\vec{k}$  nazivaju se redom *os apscisa* ili *x-os*, *os ordinata* ili *y-os* i *os aplikata* ili *z-os*. Pravokutne koordinate proizvoljnog vektora  $\vec{a}$  iz  $\mathbb{V}^3$  je uobičajeno označavati sa  $a_x, a_y$  i  $a_z$ , tj. vrijedi:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

Ako su  $A = (x_1, y_1, z_1)$  i  $B = (x_2, y_2, z_2)$  redom početak i kraj predstavnika nekog vektora  $\vec{a}$  iz  $\mathbb{V}^3$  (ili usmjerene dužine  $\overrightarrow{AB}$ ), za pravokutne koordinate vektora  $\vec{a}$  će vrijediti:

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

odnosno

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Zbog toga, za radij-vektor  $\overrightarrow{OT}$  proizvoljne točke  $T = (x, y, z)$  iz  $E^3$  očito vrijedi:

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

odnosno da je radij-vektor svake točke  $T = (x, y, z)$  iz  $E^3$  posve određen njezinim koordinatama.

Neka su  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  bilo koja dva vektora iz prostora  $\mathbb{V}^3$ , i neka je  $\lambda \in \mathbb{R}$  po volji odabran skalar. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{a} \pm \vec{b} &= (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}, \\ \lambda \vec{a} &= (\lambda a_x)\vec{i} + (\lambda a_y)\vec{j} + (\lambda a_z)\vec{k}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Nije teško dokazati kako slične formule vrijede za linearne kombinacije tri i više vektora iz prostora  $\mathbb{V}^3$  (što je ilustrirano Primjerom 1.2).

<sup>7</sup> René Descartes (latinizirano Renatus Cartesius), francuski filozof i matematičar, 1596.–1650.

<sup>8</sup> Ishodištu  $O$  pravokutnog koordinatnog sustava pripadaju koordinate  $(0, 0, 0)$ .

Neka su  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  vektori iz  $\mathbb{V}^3$ , različiti od nul-vektora. Ti su vektori kolinearni **akko** su im koordinate proporcionalne, tj. vrijedi:

$$a_x : a_y : a_z = b_x : b_y : b_z.$$

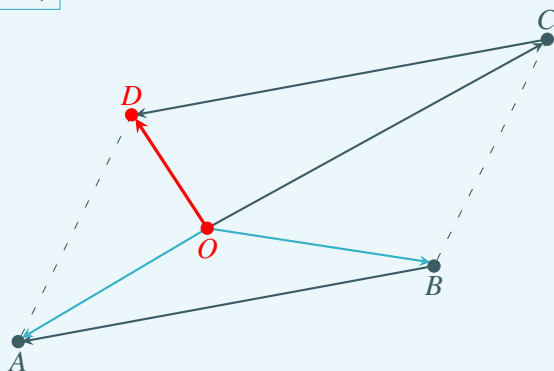
**Primjer 1.2** Zadani su vrhovi  $A = (1, -2, 3)$ ,  $B = (3, 2, 1)$ ,  $C = (6, 4, 4)$  paralelograma  $ABCD$ . Odrediti koordinate vrha  $D$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OC} + \vec{CD} = \vec{OC} + \vec{BA} \\ &= \vec{OC} - \vec{OB} + \vec{OA} \\ &= 6\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k} - (3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) + \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ &= (6 - 3 + 1)\vec{i} + (4 - 2 - 2)\vec{j} + (4 - 1 + 3)\vec{k} \\ &= 4\vec{i} + 6\vec{k}.\end{aligned}$$

Dakle, radij-vektor  $\vec{OD}$  možemo izraziti kao **linearnu kombinaciju** radij-vektora  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  i  $\vec{OC}$ , ako su točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$  vrhovi nekog paralelograma. Nadalje, za koordinate vrha  $D$  vrijedit će:  $D = (4, 0, 6)$ .



## 1.6 Skalarni produkt vektora

**Skalarni produkt vektora.** Neka su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dva vektora iz  $\mathbb{V}^3$ , različiti od nul-vektora, te neka je  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})^9$ . *Skalarni produkt* vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je **skalar (broj)** kojeg označavamo s  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , a koji je definiran formulom:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1.3)$$

Ako je jedan od vektora  $\vec{a}$  ili  $\vec{b}$  jednak nul-vektoru, tad je njihov skalarni produkt po definiciji jednak nuli. Ta činjenica, strogo govoreći **ne slijedi** iz (1.3), pošto u tom slučaju kut  $\varphi$  među vektorima **nije definiran**. Nadalje, očito je skalarni produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  jednak nuli i onda kad su vektori  $\vec{a}$

<sup>9</sup> Po dogovoru smatramo da vrijedi  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$ , i da je  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

i  $\vec{b}$  međusobno okomiti. Dakle, pomoću skalarnog produkta možemo jednostavno karakterizirati međusobnu okomitost bilo kojih dvaju **netrivijalnih** vektora iz  $\mathbb{V}^3$ .

**Uvjet okomitosti vektora.** Neka su  $\vec{a} \neq \vec{0}$  i  $\vec{b} \neq \vec{0}$  bilo koji vektori iz  $\mathbb{V}^3$ . Ti su vektori međusobno *okomiti* **akko** je  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Nije teško primijetiti kako iz definicije skalarnog produkta vektora neposredno slijedi  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ,  $\forall \vec{a} \in \mathbb{V}^3$  (skalarni kvadrat vektora jednak je kvadratu modula tog vektora).

Skalarni produkt vektora iz  $\mathbb{V}^3$  ima sljedeća svojstva:

- |                                                                                                               |                                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| (SP1) $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ , $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ <b>akko</b> je $\vec{a} = \vec{0}$ ,       | (pozitivna definitnost)                                                            |
| (SP2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ,                                                       | (komutativnost)                                                                    |
| (SP3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ ,                   | (distributivnost prema zbrajanju)                                                  |
| (SP4) $\lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$ , | (homogenost)                                                                       |
| (SP5) $ \vec{a} \cdot \vec{b}  \leq  \vec{a}   \vec{b} $ ,                                                    | za svaki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ . |

**Uvjet paralelnosti vektora.** Neka su  $\vec{a} \neq \vec{0}$  i  $\vec{b} \neq \vec{0}$  bilo koji vektori iz  $\mathbb{V}^3$ . Ti su vektori *paralelni* (ili *usporedni*) **akko** je  $|\vec{a} \cdot \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$ .

**Skalarni produkt koordinatnih vektora.** Za skalarne produkte **svih parova** koordinatnih vektora  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  što pripadaju bilo kojemu pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  u prostoru  $E^3$ , vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1 = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k}; \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{k}.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Neka su  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$  bilo koja dva vektora iz prostora  $\mathbb{V}^3$ , zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) \\ &= a_x b_x \vec{i}^2 + a_x b_y \vec{i} \cdot \vec{j} + a_x b_z \vec{i} \cdot \vec{k} + a_y b_x \vec{j} \cdot \vec{i} + a_y b_y \vec{j}^2 + a_y b_z \vec{j} \cdot \vec{k} + a_z b_x \vec{k} \cdot \vec{i} + a_z b_y \vec{k} \cdot \vec{j} + a_z b_z \vec{k}^2 \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;\end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Kombinirajući gornje dvije formule s definicijom skalarnog produkta, odnosno s formulom (1.3), dobivamo formulu za računanje kuta između dva **netrivijalna** vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$ , zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ :

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.\tag{1.5}$$

Iz posljednje formule neposredno čitamo **uvjet za okomitost** dvaju **netrivijalnih** vektora iz  $\mathbb{V}^3$ . Vektori  $\vec{a} \neq \vec{0}$  i  $\vec{b} \neq \vec{0}$  iz  $\mathbb{V}^3$  su međusobno okomiti **onda i samo onda** ako za njihove koordinate vrijedi:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

**Projekcija vektora na vektor.** Pomoću skalarnog produkta računaju se i projekcije vektora na vektor. *Skalarna projekcija* nekog vektora  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  na vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  je:

$$\vec{b} \cdot \vec{a}_0 = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = b_a.$$

*Vektorska projekcija* nekog vektora  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$  na vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  je:

$$b_a \vec{a}_0 = |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{b}_a.$$

**Primjer 1.3** Odrediti kut  $\varphi$  što ga zatvaraju vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$  i  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{4 + 9 + 1} \sqrt{1 + 1 + 0}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \varphi &= \arccos \left( -\frac{1}{2\sqrt{7}} \right) = \text{tupi kut} \approx 100^\circ 53' 36'' \\ &\approx 1,760922 \text{ rad.} \end{aligned}$$



## 1.7 Vektorski produkt vektora

**Vektorski produkt vektora.** Neka su  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  dva vektora iz  $\mathbb{V}^3$ . *Vektorski produkt* vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  je **vektor** kojeg označavamo s  $\vec{a} \times \vec{b}$ , a koji je definiran sa:

→  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$  ako je  $\vec{a} = \vec{0}$  ili  $\vec{b} = \vec{0}$  ili su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  kolinearni ( $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ).

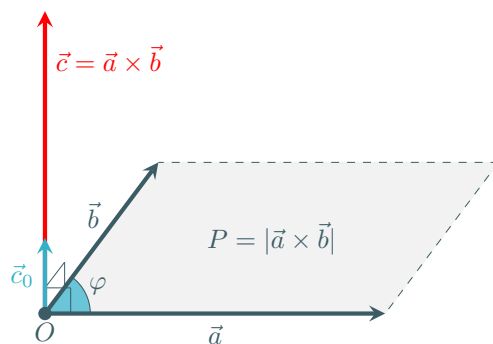
U suprotnom, vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  ima:

- modul (duljinu) **jednak površini paralelograma** kojeg razapinju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ,
- smjer **okomit na smjerove** vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ ,
- orijentaciju definiranu **pravilom desne ruke** (određuje li **ispruženi** palac desne ruke smjer od  $\vec{a}$  i **ispruženi** kažiprst – smjer od  $\vec{b}$  onda **savinuti** srednjak određuje smjer od  $\vec{a} \times \vec{b}$ ).

Za modul vektora  $\vec{a} \times \vec{b}$  dodatno vrijedi:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}). \quad (1.6)$$

Popularno se još kaže kako orijentacija vektorskog produkta  $\vec{a} \times \vec{b}$  poštuje **pravilo desnog vijka**, tj. definirana je smislom napredovanja vijka pri njegovu zakretanju od prvog faktora prema drugom, najkraćim putem (vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{a} \times \vec{b}$  tvore desnu trojku).

Slika 1.4: Vektorski produkt vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iz  $\mathbb{V}^3$ .

Vektorski produkt vektora iz  $\mathbb{V}^3$  ima sljedeća svojstva:

- |                                                                                                                  |                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| (VP1) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ i $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$ ,              | (okomitost)                                                                        |
| (VP2) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ,                                                     | (antikomutativnost)                                                                |
| (VP3) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ ,                   | (distributivnost prema zbrajanju)                                                  |
| (VP4) $\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$ , | (homogenost)                                                                       |
| (VP5) $ \vec{a} \times \vec{b}  \leq  \vec{a}   \vec{b} $ ,                                                      | za svaki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$ , $\lambda \in \mathbb{R}$ . |

Pažljiv čitatelj će zamijetiti kako **oba** produkta (skalarni i vektorski) vektora iz  $\mathbb{V}^3$  **nemaju** svojstvo asocijativnosti. Štoviše, nije teško dokazati valjanost sljedećeg teorema za sve vektore  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  iz  $\mathbb{V}^3$ :

- !  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$  (vektor komplanaran s vektorima  $\vec{b}$  i  $\vec{a}$ );
- !  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$  (vektor komplanaran s vektorima  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ ).

Također, za svaki izbor vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  iz  $\mathbb{V}^3$  lako je pokazati da vrijedi tzv. **Jacobijev identitet**<sup>10</sup>:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Veza između skalarnog i vektorskog produkta vektora iz  $\mathbb{V}^3$  je dana sljedećom relacijom, tzv. **Lagrangeovim identitetom**<sup>11</sup>:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2.$$

**Vektorski produkt koordinatnih vektora.** Za vektorske produkte **svih parova** koordinatnih vektora  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  što pripadaju bilo kojemu pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  u prostoru  $E^3$ , vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} &= \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i}; \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} &= \vec{0}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

<sup>10</sup> Carl Gustav Jacobi, njemački matematičar, 1804.–1851.

<sup>11</sup> Joseph-Louis Lagrange, talijansko-francuski matematičar i astronom, 1736.–1813.

što **praktičnije** bilježimo i **jednostavnije** pamtimo sljedećom tablicom za vektorsko množenje (produkt) koordinatnih vektora<sup>12</sup>:

| $\times$  | $\vec{i}$  | $\vec{j}$  | $\vec{k}$  |
|-----------|------------|------------|------------|
| $\vec{i}$ | $\vec{0}$  | $\vec{k}$  | $-\vec{j}$ |
| $\vec{j}$ | $-\vec{k}$ | $\vec{0}$  | $\vec{i}$  |
| $\vec{k}$ | $\vec{j}$  | $-\vec{i}$ | $\vec{0}$  |

**Tablica 1.1:** Vektorski produkt koordinatnih vektora.

**Primjer 1.4** Izračunati površinu trokuta razapetog vektorima

$$\vec{a} = 3\vec{m} + 2\vec{n} \text{ i } \vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n},$$

ako su  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$  jedinični vektori koji zatvaraju kut od  $45^\circ$ .

**Rješenje.**

Za jedinične vektore  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$  vrijedi:

$$|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1, \quad \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

Nadalje, površina trokuta kojeg razapinju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  jednaka je **polovini** modula vektorskog produkta vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , tj. vrijedi:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (3\vec{m} + 2\vec{n}) \times (\vec{m} + 4\vec{n}) \\ &= 3 \underbrace{(\vec{m} \times \vec{m})}_{\vec{0}} + 12(\vec{m} \times \vec{n}) + 2 \underbrace{(\vec{n} \times \vec{m})}_{-\vec{m} \times \vec{n}} + 8 \underbrace{(\vec{n} \times \vec{n})}_{\vec{0}} \\ &= 12(\vec{m} \times \vec{n}) - 2(\vec{m} \times \vec{n}) \\ &= 10(\vec{m} \times \vec{n}) \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \frac{1}{2} |10(\vec{m} \times \vec{n})| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |10| \cdot |\vec{m}| |\vec{n}| \sin \angle(\vec{m}, \vec{n}) \\ &= 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Elementi u prvom stupcu predstavljaju lijevi faktor, a elementi u prvom retku desni faktor vektorskog produkta.

Neka su  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$  i  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  bilo koja dva vektora iz prostora  $\mathbb{V}^3$ , zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \\ &= \text{što dopušta formalni determinatni zapis (za računanje determinanti 3. reda vidi odjeljak 3.5)} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

## 1.8 Mješoviti produkt vektora

**Mješoviti produkt vektora.** Neka su  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  tri vektora iz  $\mathbb{V}^3$ . *Mješoviti produkt* vektora  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  je **skalar (broj)** kojeg označavamo s  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , a definiran je formulom:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (1.8)$$

Iz gornje definicije je očito, ali i iz imena produkta se daje naslutiti, kako **nije** riječ o nekom novom množenju vektora iz  $\mathbb{V}^3$ , nego da je mješovito množenje vektora **kombinacija** vektorskog i skalarnog množenja. Nadalje, nije teško uočiti kako mješoviti produkt tri vektora  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  iz  $\mathbb{V}^3$  **iščekzava** u ove četiri situacije: ako je  $\vec{a} = \vec{0}$  ili  $\vec{b} = \vec{0}$  ili  $\vec{c} = \vec{0}$  ili su vektori  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  komplanarni.

Neka su  $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ ,  $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$  i  $\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$  bilo koja tri vektora iz prostora  $\mathbb{V}^3$ , zadana u pravokutnom koordinatnom sustavu  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Tada vrijedi:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left[ (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \right] \cdot (c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y)c_x + (a_z b_x - a_x b_z)c_y + (a_x b_y - a_y b_x)c_z,\end{aligned}$$

što također dopušta formalni determinatni zapis, tj. očito je:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (\dots)$$

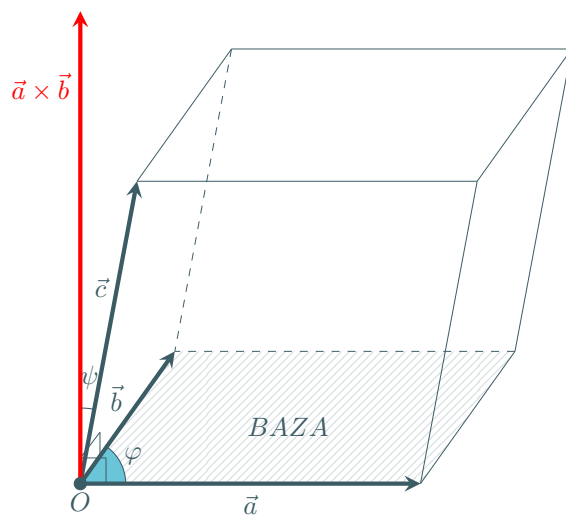
Za mješoviti produkt vektora iz  $\mathbb{V}^3$  vrijede sljedeća svojstva<sup>13</sup>:

- (MP1)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$ ,
- (MP2)  $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$ ,
- (MP3)  $\lambda(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ ,
- (MP4)  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  komplanarni (leže u istoj ravnini), (uvjet komplanarnosti)
- (MP5)  $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \leq |\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$ .

Mješovitom se produktu vektora može dati i izvjesna **geometrijska interpretacija**. Neka su  $\vec{a}, \vec{b}$  i  $\vec{c}$  tri nekomplanarna vektora iz  $\mathbb{V}^3$ , a  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  njihovi predstavnici s istom početnom točkom  $O$ . Onda oni određuju u prostoru jedan paralelopiped<sup>14</sup>. Za **volumen paralelopipeda** razapetog

<sup>13</sup> Prema svojstvu (MP1), parnom permutacijom trojke vektora, mješoviti produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  se ne mijenja, dok neparnom permutacijom mješoviti produkt mijenja samo predznak.

<sup>14</sup> Paralelopiped – **četverostrana prizma** (bilo koja) kojoj su osnovica (baza) i sve strane paralelogrami, a nasuprotne strane jednake. Najpoznatiji specijalni oblici paralelopipeda su *kvadar* (kojemu je osnovica pravokutnik) i *kocka* (koja je uspravni kvadar s kvadratom kao osnovicom).



**Slika 1.5:** Geometrijsko značenje mješovitog produkta vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  iz  $\mathbb{V}^3$ .

nekomplanarnim vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  vrijedi:

$$\begin{aligned} V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| &= |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \psi \\ &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \cdot |\vec{c}| \cdot \cos \psi \\ &\equiv |a \cdot b \cdot c \cdot \sin \varphi \cos \psi|. \end{aligned}$$

gdje su  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$  i  $\psi = \angle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ .

**Primjer 1.5** Izračunati volumen (obujam) paralelopipeda razapetog vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , ako su  $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$  i  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ .

**Rješenje.**

Za volumen paralelopipeda razapetog nekomplanarnim vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  vrijedi:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Sada je:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \text{za računanje determinanti 3. reda vidi odjeljak 3.5} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-2 - 2) - 4 \cdot (1 - 2) - 3 \cdot (1 + 2) = -13. \end{aligned}$$

Dakle,

$$V = |-13| = \boxed{13}.$$



Vrijede sljedeće formule za “složene produkte”:

$$\text{[i]} \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix},$$

$$\text{[ii]} \quad ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})((\vec{e} \times \vec{f}) \cdot \vec{g}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{a} \cdot \vec{f} & \vec{a} \cdot \vec{g} \\ \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{f} & \vec{b} \cdot \vec{g} \\ \vec{c} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{f} & \vec{c} \cdot \vec{g} \end{vmatrix}.$$

za svaki  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g} \in \mathbb{V}^3$ .

**Primjer 1.6** Odrediti volumen tetraedra čiji su vrhovi točke  $A = (2, 2, 2)$ ,  $B = (4, 3, 3)$ ,  $C = (4, 5, 4)$  i  $D = (5, 5, 6)$ .

**Rješenje.**

Tetraedar  $ABCD$  je razapet vektorima  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  i  $\vec{AD}$ . Vrijedi:

$$\vec{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Sada je:

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

= za računanje determinanti 3. reda vidi odjeljak 3.5

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 6 - 2 - 3$$

$$= 7.$$

Volumen tetraedra  $ABCD$  jednak je šestini volumena paralelopipeda razapetog vektorima  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  i  $\vec{AD}$  – dokaz ostavljamo čitatelju za vježbu. Dakle,

$$V_T = \frac{1}{6} |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{1}{6} |7| = \boxed{\frac{7}{6}}.$$



## 1.9 Zadaci

**Zadatak 1.1** Pokazati, koristeći načelo matematičke indukcije, kako svojstvo (Z1), tj. zakon asocijacije za zbrajanje vektora, vrijedi i za zbroj više od tri vektora.

**Zadatak 1.2** Na  $y$ -osi naći točku jednako udaljenu od točaka  $A = (2, 4, 0)$  i  $B = (-3, 3, 2)$ .

**Rješenje.**

$$C = (0, -1, 0).$$

**Zadatak 1.3** Je li trokut  $\triangle ABC$  s vrhovima  $A = (3, -1, 2)$ ,  $B = (0, -4, 2)$  i  $C = (-3, 2, 1)$  istostraničan ili samo jednakokračan?

**Rješenje.**

$$\text{Vrijedi: } |\vec{BC}| = |\vec{AC}| \neq |\vec{AB}|, \quad \triangle ABC \text{ je jednakokračan!}$$

**Zadatak 1.4** Dokazati da je trokut  $\triangle ABC$  pravokutan ako je  $A = (3, -1, 6)$ ,  $B = (-1, 7, -2)$ ,  $C = (1, -3, 2)$ .

**Zadatak 1.5** Neka je točka  $T \in E^3$  težište trokuta  $\triangle ABC$  (točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta), a  $O$  proizvoljna točka iz  $E^3$ . Izraziti vektor  $\vec{OT}$  kao linearnu kombinaciju vektora  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  i  $\vec{OC}$ .

**Rješenje.**

$$\vec{OT} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

**Zadatak 1.6** Neći jednakost koja izražava linearnu zavisnost vektora:

- a)  $\vec{a} = (1, 3, 5)$ ,  $\vec{b} = (7, -8, 4)$ ,  $\vec{c} = (0, 4, 5)$ ,  $\vec{d} = (2, -1, 3)$ ;  
 b)  $\vec{a} = (1, 2, 5)$ ,  $\vec{b} = (-1, 6, 3)$ ,  $\vec{c} = (0, 0, 2)$ ,  $\vec{d} = (1, 0, 4)$ .

**Rješenje.**

- a)  $\vec{d} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ ;  
 b)  $\vec{d} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ .

**Zadatak 1.7** Napisati vektor  $\vec{d} = 11\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$  kao linearnu kombinaciju vektora  $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ .

**Rješenje.**

$$\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}.$$

**Zadatak 1.8** Ispitati linearnu (ne)zavisnost vektora  $\vec{a} = (2, 3, -4)$ ,  $\vec{b} = (3, -2, 0)$ ,  $\vec{c} = (0, 1, 1)$ .

**Rješenje.**

Linearnu (ne)zavisnost vektora ispitujemo prema formuli (1.1), stoga krenimo od sljedeće jednakosti:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$

koja je ekvivalentna s

$$\alpha(2, 3, -4) + \beta(3, -2, 0) + \gamma(0, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

odnosno sa sljedećim linearnim sustavom od tri jednačbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{rcl} 2\alpha + 3\beta & = & 0 \\ 3\alpha - 2\beta + \gamma & = & 0 \\ -4\alpha & + & \gamma = 0 \end{array}$$

Determinanta matrice ovog **homogenog** sustava je:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots = -25 \neq 0,$$

pa dobiveni homogeni sustav ima samo **trivijalna** rješenja ( $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ ). Dakle, prema **Roucheovu teoremu** (vidi str. 146) zadani vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  su linearno **nezavisni**!

**Zadatak 1.9** Pokazati da su vektori  $\vec{a} = (3, 1, 8)$ ,  $\vec{b} = (3, 4, 5)$ ,  $\vec{c} = (2, 3, 3)$  linearno zavisni.

**Rješenje.**

Kao u prethodnome zadatku krenimo od sljedeće jednakosti:

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0},$$

koja je ekvivalentna s

$$\alpha(3, 1, 8) + \beta(3, 4, 5) + \gamma(2, 3, 3) = (0, 0, 0),$$

odnosno sa sljedećim linearnim sustavom od tri jednačbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{rcl} 3\alpha + 3\beta + 2\gamma & = & 0 \\ \alpha + 4\beta + 3\gamma & = & 0 \\ 8\alpha + 5\beta + 3\gamma & = & 0 \end{array} \quad (\ddagger)$$

Determinanta matrice ovog **homogenog** sustava je:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \dots = 0,$$

pa dobiveni homogeni sustav ima **netrivijalna** rješenja, tj. postoje  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ , takvi da je  $\alpha + \beta + \gamma > 0$ . Dakle, prema **Roucheovu teoremu** (vidi str. 146) zadani vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  su linearno **zavisni**!

Nadalje, nakon sljedećih koraka (operacija na jednačbama sustava  $(\ddagger)$ ):

- [i] drugu jednačbu pomnožimo s brojem  $-3$  i pribrojimo prvoj,
- [ii] drugu jednačbu pomnožimo s brojem  $-8$  i pribrojimo trećoj,
- [iii] zamijenimo prvu i drugu jednačbu,

sustav  $(\ddagger)$  dobiva (ekvivalentan) oblik

$$\begin{array}{r} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \\ -9\beta - 7\gamma = 0, \\ -27\beta - 21\gamma = 0 \end{array}$$

tj. svodi se na homogeni linearni sustav od dvije jednadžbe s tri nepoznanice

$$\begin{array}{r} \alpha + 4\beta + 3\gamma = 0 \\ -9\beta - 7\gamma = 0 \end{array}$$

Iz druge jednadžbe dobivamo  $\beta = -\frac{7}{9}\gamma$ . Uvrštavanjem u prvu jednadžbu, dobivamo  $\alpha = \frac{1}{9}\gamma$ . Prema tome, sustav  $(\ddagger)$  je zadovoljen za **svaki** izbor nepoznanica (koeficijenata):

$$\alpha = \frac{1}{9}\gamma, \quad \beta = -\frac{7}{9}\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Na primjer, za  $\gamma = 9$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -7$  je  $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0$ , i vrijedi:

$$\vec{a} - 7\vec{b} + 9\vec{c} = \vec{0} \quad \text{ili} \quad \vec{a} = 7\vec{b} - 9\vec{c}.$$

**Zadatak 1.10** Pokazati da su vektori  $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = -5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  linearno zavisni.

**Rješenje.**

Vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  su linearno zavisni. Na primjer, vrijedi:

$$\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{ili} \quad \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}.$$

**Zadatak 1.11** Diskutirati linearnu zavisnost vektora  $\vec{a} = (3, -8, 2)$ ,  $\vec{b} = (7, 6, 5)$  i  $\vec{c} = (5, 2, 6 - \lambda)$  u ovisnosti od parametra  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Rješenje.**

Za  $\lambda = \frac{91}{37}$  zadani vektori su linearno zavisni, u suprotnom su linearno nezavisni. Na primjer, vrijedi:

$$-\frac{8}{37}\vec{a} - \frac{23}{37}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \quad \text{ili} \quad \vec{c} = \frac{8}{37}\vec{a} + \frac{23}{37}\vec{b}.$$

**Zadatak 1.12** Zadani su vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{d} = 3\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k}$ . Izraziti svaki od tih vektora kao linearnu kombinaciju ostalih.

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\vec{a} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d}, \quad \vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{d}, \quad \vec{c} = -2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{d}, \quad \vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}.$$

**Zadatak 1.13** Zadana su tri **uzastopna** vrha paralelograma  $A = (9, -5, 6)$ ,  $B = (3, -3, 1)$  i  $C = (1, 2, -3)$ . Odrediti četvrti vrh  $D$ .

**Rješenje.**

$$D = (7, 0, 2).$$

**Zadatak 1.14** Zadana su tri **uzastopna** vrha paralelograma  $A = (3, -4, 7)$ ,  $B = (-5, 3, -2)$  i  $C = (5, \lambda, 2)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Odrediti:

a) četvrti vrh  $D$ ;

b) vrijednost realnog parametra  $\lambda$  tako da je  $|\vec{AD}| = \sqrt{116}$ .

**Rješenje.**

a) Vrijedi (vidi Primjer 1.2):

$$\vec{OD} = \vec{OC} - \vec{OB} + \vec{OA} = \dots = (13, \lambda - 7, 11) \Rightarrow D = (13, \lambda - 7, 11).$$

b) Sada za vektor  $\vec{AD}$  vrijedi:

$$\vec{AD} = (10, \lambda - 3, 4) \Rightarrow |\vec{AD}| = \sqrt{10^2 + (\lambda - 3)^2 + 4^2} = \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 125}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} |\vec{AD}| = \sqrt{116} &\Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 125} = \sqrt{116} \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 125 = 116 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 3}. \end{aligned}$$

**Zadatak 1.15** Zadana su dva **susjedna** vrha paralelograma  $A = (2, -3, 5)$  i  $B = (-1, 3, 2)$  i sjecište  $S = (4, -1, 7)$  njihovih dijagonala. Odrediti preostala dva vrha tog paralelograma.

**Rješenje.**

$$C = (6, 1, 9), \quad D = (9, -5, 12).$$

**Zadatak 1.16** Pokazati da su točke  $A = (3, -1, 2)$ ,  $B = (1, 2, -1)$ ,  $C = (-1, 1, -3)$  i  $D = (3, -5, 3)$  vrhovi trapeza, te odrediti njegovu površinu  $P$ .

**Rješenje.**

Za vektore  $\vec{AB} = (-2, 3, -3)$  i  $\vec{DC} = (-4, 6, -6)$  vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{DC} &= 44, \quad |\vec{AB}| = \sqrt{22}, \quad |\vec{DC}| = \sqrt{88}, \\ \text{odnosno } \begin{cases} |\vec{AB} \cdot \vec{DC}| = 44 \\ |\vec{AB}||\vec{DC}| = \sqrt{22}\sqrt{88} = 44 \end{cases} &\Rightarrow |\vec{AB} \cdot \vec{DC}| = |\vec{AB}||\vec{DC}| \Leftrightarrow \boxed{\vec{AB} \parallel \vec{DC}}. \end{aligned}$$

Nadalje, ako su  $\vec{v}_1$  i  $\vec{v}_2$  vektori koji predstavljaju dijagonale nekog trapeza, njegova površina  $P$  se može dobiti kao:

$$P = \frac{1}{2} |\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|.$$

Dakle, ako su  $\vec{AB}$  i  $\vec{DC}$  vektori koji predstavljaju osnovice nekog trapeza, za njegovu površinu vrijedi:

$$P = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{DB}| = \dots \approx \boxed{18,31}.$$

**Zadatak 1.17** Ako su zadane točke  $A = (-2, 1, 3)$ ,  $B = (1, -7, 4)$ ,  $C = (0, 4, -2)$  i  $D = (1, 1, 1)$ . Izračunati  $\vec{AB} \cdot \vec{CD}$  i  $\vec{AC} \times \vec{BD}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 30 \quad \text{i} \quad \vec{AC} \times \vec{BD} = (31, 6, 16).$$

**Zadatak 1.18** Vrhovi trokuta su:  $A = (-1, -2, 4)$ ,  $B = (-4, -2, 0)$  i  $C = (3, -2, 1)$ . Izračunati unutarnji kut pri vrhu  $B$ .

**Rješenje.**

$$\beta = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

**Zadatak 1.19** Zadane su točke  $A = (-1, 3, -7)$ ,  $B = (2, -1, 5)$  i  $C = (0, 1, -5)$ . Izračunati sljedeće umnoške (produkte):

$$\text{a) } (2\vec{AB} - \vec{CB})(2\vec{BC} + \vec{BA}); \quad \text{b) } (\vec{AB} \cdot \vec{AC}) \cdot \vec{BC}; \quad \text{c) } (\vec{AC} \cdot \vec{BC}) \cdot \vec{AB}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } -524; \quad \text{b) } (-70, 70, -350); \quad \text{c) } (-78, 104, -312).$$

**Zadatak 1.20** Zadani su vektori  $\vec{a} = (1, 2, 1)$  i  $\vec{b} = (2, 1, -1)$ . Izračunati:

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad \text{b) } (\vec{a} - \vec{b})^2; \quad \text{c) } \sqrt{\vec{a}^2}; \quad \text{d) } \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

**Rješenje.**

a) Prema formuli za skalarni produkt vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  (pomoću njihovih koordinata) vrijedi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = \boxed{3};$$

b) Prema formuli (1.2) vrijedi  $\vec{a} - \vec{b} = (1 - 2)\vec{i} + (2 - 1)\vec{j} + (1 + 1)\vec{k} = -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ , pa je:

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}^2 = \sqrt{6}^2 = 6;$$

$$\text{c) } \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2} = \sqrt{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}^2} = \sqrt{\sqrt{6}^2} = \sqrt{6};$$

d) Prema formuli (1.5) za kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  vrijedi:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \boxed{60^\circ}.$$

**Zadatak 1.21** Pokazati da je trokut  $\triangle ABC$  s vrhovima  $A = (3, 0, 7)$ ,  $B = (4, 2, 2)$  i  $C = (9, 2, 9)$  pravokutan. Koja točka je vrh pravog kuta?

**Rješenje.**

Točka  $A$  je vrh pravog kuta!

**Zadatak 1.22** Pokazati da je četverokut  $\square ABCD$  s vrhovima  $A = (-3, 5, 4)$ ,  $B = (1, 0, -5)$ ,  $C = (1, -1, 6)$  i  $D = (-3, 4, 15)$  romb<sup>15</sup>.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $|\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = |\vec{DA}| = \sqrt{122}$ .

**Zadatak 1.23** Odrediti parametar  $t \in \mathbb{R}$  tako da vektori  $\vec{a} = t\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$  i  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - t\vec{k}$  budu međusobno okomiti.

**Rješenje.**

Za netrivialne vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{a} \perp \vec{b} &\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ &\Leftrightarrow t - 6 - 2t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = -6.\end{aligned}$$

**Zadatak 1.24** Odrediti parametar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da vektori  $\vec{a} = (2 \cdot a^\lambda, \lambda, \lambda - 1)$  ( $a > 0$ ) i  $\vec{b} = (\lambda + 1, \lambda - 2, 0)$  imaju isti modul, a zatim naći kut izmjeđu njih.

**Rješenje.**

$$\begin{aligned}|\vec{a}| = |\vec{b}| &\Leftrightarrow \sqrt{(2 \cdot a^\lambda)^2 + \lambda^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{(\lambda + 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + 0^2} \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot a^{2\lambda} + \lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 + \lambda^2 - 4\lambda + 4 \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot a^{2\lambda} = 4 \\ &\Leftrightarrow a^{2\lambda} = 1 = a^0 \\ &\Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0.\end{aligned}$$

Dakle, za  $\lambda = 0$  zadani vektori imaju isti modul.

Nadalje, za  $\lambda = 0$  je  $\vec{a} = (2, 0, -1)$  i  $\vec{b} = (1, -2, 0)$ , pa prema formuli (1.5) za kut između njih vrijedi:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \varphi = 66^\circ 25' 19''.$$

<sup>15</sup> Romb je četverokut u kojem su sve stranice jednake duljine. Njegove dijagonale su međusobno okomite i simetrale unutarnjih kutova (zbog čega mu se može upisati kružnica sa središtem u sjecištu dijagonala). Dodatno, dijagonale romba se prepolavljaju. Svaki romb je paralelogram. Mjere nasuprotnih unutarnjih kutova u rombu su jednake. U posebnom slučaju: ako su svi unutarnji kutovi pravi, romb postaje kvadrat.

**Zadatak 1.25** Odrediti vektor  $\vec{b}$  kolinearan s vektorom  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  takav da je  $\vec{b} \cdot \vec{a} = 3$ .

**Rješenje.**

$$\vec{b} = \vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}.$$

**Zadatak 1.26** Vektor  $\vec{c}$  je okomit na vektore  $\vec{a} = (3, 2, 2)$  i  $\vec{b} = (18, -22, -5)$ , a sa  $y$ -osi zatvara tupi kut. Naći vektor  $\vec{c}$  ako je  $|\vec{c}| = 14$ .

**Rješenje.**

$$\vec{c} = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 12\vec{k}.$$

**Zadatak 1.27** Vektor  $\vec{c}$  je okomit na  $z$ -os i na vektor  $\vec{a} = (8, -15, 3)$ . Naći vektor  $\vec{c}$  ako je  $|\vec{c}| = 51$ , i ako sa  $x$ -osi zatvara šiljasti kut.

**Rješenje.**

$$\vec{c} = 45\vec{i} + 24\vec{j}.$$

**Zadatak 1.28** Zadani su vektori  $\vec{a} = (2, -1, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, -3, 2)$  i  $\vec{c} = (3, 2, -4)$ . Naći vektor  $\vec{x}$  ako je  $\vec{a} \cdot \vec{x} = -5$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} = -11$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 20$ .

**Rješenje.**

$$\vec{x} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}.$$

**Zadatak 1.29** Zadani su vektori  $\vec{a} = (3, -1, 5)$  i  $\vec{b} = (1, 2, -3)$ . Odrediti vektor  $\vec{x}$  takav da je  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 9$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{b} = -4$ .

**Rješenje.**

$$\vec{x} = t\vec{i} + (1 - 2t)\vec{j} + (2 - t)\vec{k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 1.30** Naći vektor  $\vec{a}$  koji s vektorima  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  redom zatvara kutove  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $\beta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\gamma = \frac{2\pi}{3}$ , i za koji vrijedi  $|\vec{a}| = 4$ .

**Rješenje.**

$$\vec{a} = 2\sqrt{2}\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

**Zadatak 1.31** Naći skalarnu projekciju vektora  $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$  na vektor  $\vec{b} = \vec{m} + \vec{n}$  ako je  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 3$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$ .

**Rješenje.**

$$a_b = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = -\frac{22\sqrt{19}}{\sqrt{19}}.$$

**Zadatak 1.32** Zadani su vektori  $\vec{a} = \lambda\vec{m} + 17\vec{n}$  i  $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$ , gdje je  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 5$ ,  $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{2\pi}{3}$ . Odrediti:

- koeficijent  $\lambda$  tako da vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  budu međusobno okomiti;
- duljinu vektora  $\vec{c} = 4\vec{a} - 23\vec{b}$ , za nađenu vrijednost koeficijenta  $\lambda$ .

**Rješenje.**

a)  $\lambda = 40$ ;

b)  $|\vec{c}| = 91\sqrt{19}$ .

**Zadatak 1.33** Naći kut koji zatvaraju jedinični vektori  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$  ako su vektori  $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$  i  $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$  međusobno okomiti.

**Rješenje.**

$$\theta = \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ.$$

**Zadatak 1.34** Neka su  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$  jedinični vektori koji zatvaraju kut od  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Izračunati duljine dijagonala i površinu romba razapetog vektorima  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$ .

**Rješenje.**

**Svaki romb** je paralelogram, pa stoga površinu  $P_\diamond$  romba razapetog vektorima  $\vec{m}$  i  $\vec{n}$  računamo kao modul vektorskog produkta ovih vektora, tj. vrijedi:

$$P_\diamond = |\vec{m} \times \vec{n}| = |\vec{m}||\vec{n}| \sin \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

Nadalje, dijagonale romba su simetrale njegovih unutarnjih kutova, dok je zbroj dva susjedna unutarnja kuta  $180^\circ$ . Dakle, za dijagonale romba, sa stranicom duljine  $|\vec{m}|$ , vrijedi (detalje prepustimo čitatelju):

$$d_1 = 2|\vec{m}| \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \quad \text{i} \quad d_2 = 2|\vec{m}| \sin \frac{\alpha}{2} = 1.$$

**Zadatak 1.35** Odrediti jedinični vektor  $\vec{c}_0$  koji je komplanaran s vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , ako je  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$  i  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 7$ ,  $\vec{c} \cdot \vec{b} = 3$ .

**Rješenje.**

$$\vec{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}).$$

**Zadatak 1.36** Odrediti skalarni produkt vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i kut između njih ako je  $\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$  i  $\vec{b} = -5\vec{i} + 13\vec{j} + 12\vec{k}$ .

**Rješenje.**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 86^\circ 1' 49''.$$

**Zadatak 1.37** Naći vektor  $\vec{c}$  koji je okomit na vektore  $\vec{a} = (2, -3, 1)$  i  $\vec{b} = (1, -2, 3)$  i koji zadovoljava uvjet  $\vec{c} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$ .

**Rješenje.**

$$\vec{c} = 7\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}.$$

**Zadatak 1.38** Zadani su vektori  $\vec{a} = (3, -1, 4)$  i  $\vec{b} = (5, 2, -6)$ . Naći:

- a) skalarni produkt  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ;
- b) vektorski produkt  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;
- c) površinu paralelograma konstruiranog nad vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

**Rješenje.**

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$ ;      b)  $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 38, 11)$ ;      c)  $P = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1569}$ .

**Zadatak 1.39** Ako su zadani vektori  $\vec{a} = (2, -5, 1)$  i  $\vec{b} = (3, 0, -4)$  naći  $\vec{a} \times \vec{b}$  i uvjeriti se da je  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$  i  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$ .

**Rješenje.**

$\vec{a} \times \vec{b} = (20, 11, 15)$ .

**Zadatak 1.40** Zadani su vektori  $\vec{a} = (-3, 1, -4)$  i  $\vec{b} = (0, 2, -5)$ . Naći:

- a)  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;      b)  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ;      c)  $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$ ;      d)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a}$ ;      e)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$ .

**Rješenje.**

- a)  $\vec{a} \times \vec{b} = (3, -15, -6)$ ;      b)  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{30}$ ;      c)  $\varphi \approx 36^\circ 45' 21''$ ;
- d)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{a} = (-3, 15, 6)$ ;      e)  $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = (3, -15, -6)$ .

**Zadatak 1.41** Zadani su vektori  $\vec{a} = (2, 0, 4)$ ,  $\vec{b} = (-5, 1, -3)$  i  $\vec{c} = (-4, -1, 7)$ . Odrediti vektore:

- a)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ;      b)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ .

**Rješenje.**

- a)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-96, 20, -52)$ ;
- b)  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (-188, -2, 94)$ .

**Zadatak 1.42** Zadani su vektori  $\vec{a} = (0, 2\lambda, \lambda)$ ,  $\vec{b} = (2, 2, 1)$  i  $\vec{c} = (-1, -2, -1)$ . Odrediti vektor  $\vec{d}$  koji zadovoljava uvjete:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \quad \text{i} \quad \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 2\lambda, -4\lambda)$ . Nadalje, nepoznati vektor zadajmo kao  $\vec{d} = (x, y, z)$ , pa ćemo imati:  $\vec{c} \times \vec{d} = (y - 2z, z - x, 2x - y)$ . Kako je  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ , to vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} y - 2z &= 0 \\ -x + z &= 2\lambda \\ 2x - y &= -4\lambda \end{aligned}$$

što predstavlja linearni sustav od tri jednadžbe s četiri nepoznanice, kod kojeg je posljednja (treća) jednadžba **linearно zavisna** s prvom i drugom jednadžbom (što se lako pokazuje), pa je dobiveni sustav **ekvivalentan** sa sljedećim sustavom od dvije jednadžbe i četiri nepoznanice:

$$\begin{aligned} y - 2z &= 0 \\ -x + z &= 2\lambda \end{aligned}$$

Sada, sličnim računanjem dobivamo kako je  $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}$  ekvivalentno sa sljedećim linearnim sustavom:

$$\begin{array}{rcl} -y + 2z & = & 0 \\ x & -2z & = -\lambda, \\ -2x + 2y & = & 2\lambda \end{array}$$

kod kojeg je, opet, posljednja (treća) jednačba linearno zavisna s prvom i drugom jednačbom u tom sustavu (što se također lako pokazuje), pa je ovaj sustav ekvivalentan sa sljedećim sustavom od dvije jednačbe i četiri nepoznanice:

$$\begin{array}{rcl} -y + 2z & = & 0 \\ x & -2z & = -\lambda \end{array}$$

Dakle, dobili smo dva linearna sustava po dvije jednačbe i četiri nepoznanice, što, u biti, možemo predstaviti jednim linearnim sustavom s tri jednačbe i četiri nepoznanice (jer su u oba dobivena sustava prve jednačbe identične):

$$\begin{array}{rcl} -y + 2z & = & 0 \\ x & -2z & = -\lambda. \\ -x & + & z = 2\lambda \end{array} \quad (\text{X})$$

Lako je se uvjeriti kako je linearni sustav (X) neodređen, tj. da ima beskonačno mnogo rješenja, odnosno da vrijedi:

$$\begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -2\lambda, \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{d} = (-3\lambda, -2\lambda, -\lambda).$$

(Za više detalja glede rješavanja neodređenih linearnih sustava vidi poglavlje **Linearni sustavi**, str. 139.)

**Zadatak 1.43** Izračunati mješoviti produkt  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  ako je:

- a)  $\vec{a} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{c} = (0, 0, -1)$ ;  
b)  $\vec{a} = (3, 4, 5)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{c} = (2, 0, 3)$ .

**Rješenje.**

- a)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -1$ ;  
b)  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 5$ .

**Zadatak 1.44** Izračunati volumen paralelopipeda konstruiranog nad vektorima:

- a)  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, 4, -1)$ ,  $\vec{c} = (0, -1, 0)$ ;  
b)  $\vec{a} = (3, -1, 4)$ ,  $\vec{b} = (-4, 2, 3)$ ,  $\vec{c} = (1, -1, -2)$ .

**Rješenje.**

- a)  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |-10| = 10$ ;  
b)  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |10| = 10$ .

**Zadatak 1.45** Zadane su točke  $A = (1, 4, -2)$ ,  $B = (7, 3, -1)$ ,  $C = (-2, 6, 3)$  i  $D = (5, -1, -4)$ . Odrediti volumen tetraedra<sup>16</sup> (trostrane piramide)  $ABCD$ .

<sup>16</sup> Tetraedar je najmanji konveksan skup koji sadrži četiri nekomplanarne točke. Te su točke vrhovi tetraedra.

**Rješenje.**

Primjenom **mješovitog produkta vektora** možemo odrediti *volumen tetraedra* ako su zadani njegovi vrhovi  $A_1, A_2, A_3$  i  $A_4$ :

$$V_T = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}|.$$

(Volumen tetraedra  $A_1A_2A_3A_4$  jednak je **šestini** volumena paralelopipeda razapetog vektorima  $\overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\overrightarrow{A_1A_3}$  i  $\overrightarrow{A_1A_4}$  – dokaz ostavljamo čitatelju za vježbu.)

Dakle, vrijedi:

$$V_T = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}| = \dots = \frac{119}{6}.$$

**Zadatak 1.46** Vrhovi tetraedra su  $A = (-2, 1, 4)$ ,  $B = (3, -2, 5)$ ,  $C = (-4, 2, 0)$  i  $D = (2, -3, 0)$ . Odrediti:

- a) volumen tetraedra  $ABCD$ ;
- b) visinu tetraedra spuštenu iz vrha  $D$ .

**Rješenje.**

a)  $V_T = 4$ ;

b)  $V_T = \frac{1}{3} B \cdot v \Rightarrow v = \frac{3V_T}{B} = \frac{12\sqrt{446}}{223}.$

(Volumen tetraedra jednak je trećini produkta **površine  $B$  bilo koje strane** tetraedra i **duljine  $v$  pripadajuće visine** tetraedra.)

**Zadatak 1.47** Odrediti vrijednost parametra  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da su vektori  $\vec{a} = (2, 3, 7)$ ,  $\vec{b} = (-5, 1, 4)$ , i  $\vec{c} = (4, 2, \lambda)$  linearno zavisni.

**Rješenje.**

Svaka tri komplanarna vektora iz  $\mathbb{V}^3$  su linearno zavisna. Stoga, tri vektora iz  $\mathbb{V}^3$  su linearno zavisna **akko** njihov mješoviti produkt iščezava!

Zadani vektori su linearno zavisni za  $\lambda = \frac{66}{17}.$

**Zadatak 1.48** Razložiti vektor  $\vec{c}$  na komponente duž vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $(\vec{a} \times \vec{b})$  ako je:  $\vec{a} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (-2, -1, 2)$ ,  $\vec{c} = (1, -1, 2)$ .

**Rješenje.**

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

**Zadatak 1.49** Naći visinu na stranicu  $AC$  i površinu trokuta  $\triangle ABC$  zadanog vrhovima  $A = (-3, -2, 0)$ ,  $B = (3, -3, 1)$  i  $C = (5, 0, 2)$ .

**Rješenje.**

Površina trokuta  $\triangle ABC$  jednaka je polovini površine paralelograma  $ABCD$ , paralelograma razapetog vektorima  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{AC}$ . Kako je

$$\overrightarrow{AB} = (6, -1, 1) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{AC} = (8, 2, 2),$$

vrijedi:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} P_{ABCD} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |-4\vec{i} - 4\vec{j} + 20\vec{k}| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 20^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{432} = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Nadalje, za površinu trokuta  $\triangle ABC$  vrijedi formula:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{|\vec{AC}| \cdot v_{AC}}{2} \Rightarrow v_{AC} = \frac{2 \cdot P_{\triangle ABC}}{|\vec{AC}|} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

**Zadatak 1.50** Izračunati skalarnu projekciju vektora  $\vec{a} = (3, -12, -4)$  na vektor  $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$ , ako je:  $\vec{c} = (1, 0, -2)$  i  $\vec{d} = (1, 3, -4)$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} = (6, 2, 3), \quad a_b = \vec{a} \cdot \vec{b}_0 = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-18}{\sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{-18}{7}.$$

**Zadatak 1.51** Zadani su vektori  $\vec{a} = (2, -4, 3)$ ,  $\vec{b} = (3, -1, 5)$  i  $\vec{c} = (1, -2, 4)$ . Izračunati:

- vektor  $\vec{x}$  iz uvjeta  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 1$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{b} = 2$ ,  $\vec{x} \cdot \vec{c} = 3$ ;
- jedinični vektor koji je normalan na ravninu koju čine (razapinju) vektori  $\vec{x}$  i  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ;
- skalarnu projekciju vektora  $\vec{u} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  na vektor  $\vec{x}$ ;
- površinu paralelograma razapetog nad vektorima  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$  i  $\vec{x}$ .

**Rješenje.**

$$\text{a) } \vec{x} = (-1, 0, 1); \quad \text{b) } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{1641}}(26, -17, 26); \quad \text{c) } u_x = \frac{19\sqrt{2}}{2}; \quad \text{d) } P = 3\sqrt{1641}.$$

**Zadatak 1.52** Odrediti parametar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da vektori  $\vec{a} = \lambda\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\lambda\vec{j}$  i  $\vec{c} = 3\lambda\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$  budu komplanarni. Zatim, za nađene vrijednosti parametra  $\lambda$  razložiti vektor  $\vec{a}$  po pravcima vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ .

**Rješenje.**

Za netrivialne vektore  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  vrijedi (svojstvo (MP4) mješovitog produkta vektora):

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ su komplanarni (leže u istoj ravnini)} \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

Nadalje, budući da su vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  zadani pravokutnim koordinatama, njihov mješoviti produkt možemo računati po formuli (•••). Nakon uvrštavanja koordinata zadanih vektora dobivamo:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 4 \\ 1 & -2\lambda & 0 \\ 3\lambda & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = \pm 1}.$$

Dakle, za  $\lambda = \pm 1$  vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  su komplanarni.

Uzmimo da je  $\lambda = 1$ , tada imamo:  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$  i  $\vec{c} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . Sada još trebamo razložiti vektor  $\vec{a}$  po pravcima vektora  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ , odnosno naći takve skalare  $\alpha$  i  $\beta$ , da vrijedi:

$$\begin{aligned}\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} &\Leftrightarrow (1, 1, 4) = \alpha(1, -2, 0) + \beta(3, -3, 4) \\ &\Leftrightarrow (1, 1, 4) = (\alpha, -2\alpha, 0) + (3\beta, -3\beta, 4\beta) \\ &\Leftrightarrow (1, 1, 4) = (\alpha + 3\beta, -2\alpha - 3\beta, 0 + 4\beta).\end{aligned}$$

Iskoristimo sada jednakost dvaju vektora, pa posljednja jednadžba u biti postaje linearni sustav od tri jednadžbe s dvije nepoznanice ( $\alpha$  i  $\beta$ ), tj. imamo:

$$\begin{array}{rcl}\alpha + 3\beta & = & 1 \\ -2\alpha - 3\beta & = & 1 \\ \hline 4\beta & = & 4\end{array}$$

Nije teško pokazati da taj sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $\alpha = -2$ ,  $\beta = 1$ . Dakle, bit će:  $\vec{a} = -2\vec{b} + \vec{c}$ .

Na sličan način se pokazuje da za  $\lambda = -1$  vrijedi:  $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$ . ■

**Zadatak 1.53** Vektori  $\vec{a} = (1, 2m, 1)$ ,  $\vec{b} = (2, m, m)$  i  $\vec{c} = (3m, 2, -m)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ , bridovi su tetraedra.

- Odrediti volumen tog tetraedra (u ovisnosti o parametru  $m$ );
- Naći  $m$  tako tako da vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  budu komplanarni. Za nađenu vrijednost parametra  $m$  razložiti vektor  $\vec{c}$  po pravcima vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

**Rješenje.**

$$\text{a) } V_T = \frac{1}{6}|6m^3 - 2m + 4|; \quad \text{b) } m = -1; \quad \vec{c} = -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{4}{3}\vec{b}.$$
■

**Zadatak 1.54** Zadani su vektori  $\vec{a} = (2m, 1, 1 - m)$ ,  $\vec{b} = (-1, 3, 0)$  i  $\vec{c} = (5, -1, 8)$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .

- Odrediti vrijednost parametra  $m$  tako da vektor  $\vec{a}$  zatvara jednake kutove s vektorima  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ ;
- Za nađenu vrijednost parametra  $m$  naći volumen paralelopipeda konstruiranog nad vektorima  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  i jednu visinu tog paralelopipeda.

**Rješenje.**

$$\text{a) } m = \frac{1}{4}; \quad \text{b) } V = \frac{19}{2}; \quad v = \frac{\sqrt{190}}{5}.$$
■

**Zadatak 1.55** Naći površinu trokuta određenog vektorima  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  i  $3\vec{a} - 2\vec{b}$ , ako je  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{19}$ .

**Rješenje.**

Površina trokuta kojeg razapinju vektori  $\vec{u}$  i  $\vec{v}$  jednaka je (vidi Primjer 1.4) **polovini** modula vektorskog produkta tih vektora, tj. vrijedi:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|.$$

U našem slučaju će biti:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2}|(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - 2\vec{b})|,$$

odnosno (jer vrijedi  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0} = \vec{b} \times \vec{b}$ )

$$\begin{aligned} P_{\Delta} &= \frac{1}{2} | -4(\vec{a} \times \vec{b}) - 9(\vec{b} \times \vec{a}) | = \frac{1}{2} | -4(\vec{a} \times \vec{b}) + 9(\vec{a} \times \vec{b}) | = \frac{1}{2} | 5(\vec{a} \times \vec{b}) | \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= 15 \cdot \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Kut između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  nije zadan, pa ga je potrebno odrediti! Budući da vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} + \vec{b}$  čine trokut, u kojem je stranica  $\vec{a} + \vec{b}$  upravo nasuprot suplementu kuta između vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , možemo iskoristiti **kosinusov poučak**<sup>17</sup> za određivanje suplementa tog nepoznatog kuta, tj. vrijedi:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \cos \theta = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} + \vec{b}|^2}{2|\vec{a}||\vec{b}|} = \boxed{-\frac{1}{2}}.$$

Dakle, imamo da je:

$$\theta = 120^\circ,$$

odnosno

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \gamma = 180^\circ - \theta = 60^\circ.$$

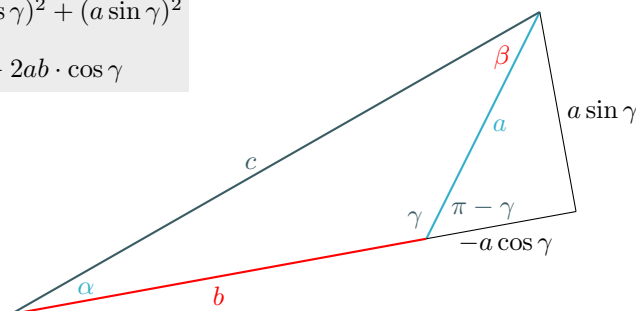
Sada je:

$$\sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

tj. vrijedi

$$P_{\Delta} = \boxed{\frac{15\sqrt{3}}{2}}.$$

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a \cos \gamma)^2 + (a \sin \gamma)^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \end{aligned}$$



**Slika 1.6:** Al-Kašijeva<sup>18</sup> inačica kosinusovog poučka (slučaj kada je  $\gamma$  tupi kut).

<sup>17</sup> *Kosinusov poučak* – kvadrat stranice u trokutu jednak je zbroju kvadrata drugih dviju stranica, umanjenom za dvostruki umnožak tih stranica i kosinusa kuta između njih, odnosno vrijedi formula:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$  – gdje su  $a$ ,  $b$ ,  $c$  stranice trokuta, a  $\gamma$  unutarnji kut nasuprot stranici  $c$  (analogno se zapisuju formule za preostala dva kuta). To je poopćenje Pitagorina poučka (koji se dobiva za  $\gamma = 90^\circ$ ).

<sup>18</sup> Giyāt al-dīn Ğamšīd ibn Mas'ūd al-Kāšī, perzijski matematičar i astronom, oko 1380.–1429.

**Zadatak 1.56** Zadani su vektori  $\vec{a} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (-2, -1, 2)$  i  $\vec{c} = (1, -1, 2)$ .

- a) Raščlaniti vektor  $\vec{c}$  po pravcima vektora  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{a} \times \vec{b}$ ;  
b) Odrediti kut između vektora  $\vec{c}$  i ravnine određene vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

**Rješenje.**

a)  $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b})$ ;                      b)  $\psi = 60^\circ$ .

**Zadatak 1.57** Neka su točke  $A = (1, 3, 4)$ ,  $B = (2, 3, 5)$  i  $C = (0, 2, 4)$  vrhovi trokuta. Izračunati:

- a) Opseg i površinu trokuta  $\triangle ABC$ ;  
b) Visinu  $v_A$ .

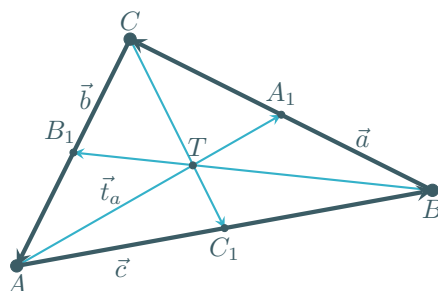
**Rješenje.**

a)  $O = 2\sqrt{2} + \sqrt{6}$ ,  $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;                      b)  $v_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Zadatak 1.58** Vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  stranice su trokuta. Pomoću ovih vektora izraziti sve težišnice trokuta (vidi Sliku 1.7).

**Rješenje.**

Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta sa središtem (polovištem) nasuprotne stranice, a ujedno i duljina te dužine. Budući da su vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  stranice trokuta, pretpostavimo da je:  $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{CA}$  i  $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ .



**Slika 1.7:** Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki – težištu trokuta.

Sada očigledno vrijedi:

$$\vec{t}_a = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a},$$

odnosno

$$\vec{t}_a = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Na sličan način se pokazuje da je:

$$\vec{t}_b = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{t}_c = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}.$$

**Zadatak 1.59** Neka je točka  $T \in E^3$  težište tetraedra  $ABCD$  (točka u kojoj se sijeku težišnice tetraedra), a  $O$  proizvoljna točka iz  $E^3$ . Izraziti vektor  $\overrightarrow{OT}$  kao linearnu kombinaciju vektora  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  i  $\overrightarrow{OD}$ .

**Rješenje.**

Težišnica tetraedra je spojnica vrha tetraedra s težištem nasuprotne strane. Sve četiri težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki – težištu tetraedra. Težište tetraedra dijeli svaku težišnicu u omjeru 3:1, mjereći od vrha tetraedra. Vrijedi (detalje prepuštamo čitatelju):

$$\vec{OT} = \frac{1}{4} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

**Zadatak 1.60** Vektori  $\vec{u} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$  i  $\vec{v} = \vec{p} - 3\vec{q}$  stranice su paralelograma, gdje je  $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$ ,  $|\vec{q}| = 3$ ,  $\angle(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$ . Odrediti:

- a)  $|\vec{u} + \vec{v}| = ?$   
 b)  $|\vec{u} - \vec{v}| = ?$   
 c) kut između dijagonala paralelograma?

**Rješenje.**

- a)  $|\vec{u} + \vec{v}| = 15$ ;                      b)  $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{593}$ ;                      c)  $\varphi \approx 33^\circ 57' 4''$ .

**Zadatak 1.61** Zadani su vektori  $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 0, 1)$  i  $\vec{c} = (2, 3, 1)$ .

- a) Odrediti vektor  $\vec{d}$  okomit na vektore  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , a koji s vektorom  $\vec{c}$  gradi površinu  $\sqrt{75}$ ;  
 b) Za koje  $m$  vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{u} = (10, 2, m)$  određuju trostranu piramidu (tetraedar) volumena 20?

**Rješenje.**

- a)  $\vec{d}_1 = (1, -2, 1)$ ,  $\vec{d}_2 = (-1, 2, -1)$ ;                      b)  $m_1 = 54$ ,  $m_2 = -66$ .

**Zadatak 1.62** Zadani su vektori  $\vec{a} = (2, 2, 1)$  i  $\vec{b} = (-1, -2, -1)$ . Odrediti  $\lambda = -\vec{a} \cdot \vec{b}$  i definirati vektor  $\vec{c} = (0, 2\lambda, \lambda)$ . Zatim odrediti sve vektore  $\vec{d}$  za koje vrijedi  $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{d}$  te  $|\vec{d}| = 7\sqrt{14}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\lambda = -\vec{a} \cdot \vec{b} = -(-2 - 4 - 1) = 7 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = (0, 14, 7) \text{ i } \vec{c} \times \vec{a} = (0, 14, -28).$$

Nadalje, nepoznate vektore zadajmo kao  $\vec{d} = (x, y, z)$ , pa ćemo imati:  $\vec{b} \times \vec{d} = (y - 2z, -x + z, 2x - y)$ . Kako je  $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{d}$ , to vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{array}{rcl} y - 2z & = & 0 \\ -x & + & z = 14 \\ 2x - y & = & -28 \end{array}$$

što predstavlja linearni sustav od tri jednadžbe s tri nepoznanice, kod kojeg je posljednja (treća) jednadžba **linearno zavisna** s prvom i drugom jednadžbom (što se lako pokazuje), pa je dobiveni sustav **ekvivalentan** sa sljedećim sustavom od dvije jednadžbe i tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rcl} y - 2z & = & 0 \\ -x & + & z = 14 \end{array}$$

Dakle, vrijedi:

$$y = 2z \text{ i } x = z - 14.$$

Dodatno, znamo da je  $|\vec{d}| = 7\sqrt{14} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 686$ , pa dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$3z^2 - 14z - 245 = 0.$$

Njezina rješenja su  $z_1 = -7$  i  $z_2 = \frac{35}{3}$ . Stoga je:  $d_1 = (-21, -14, -7)$  i  $d_2 = (-\frac{7}{3}, \frac{70}{3}, \frac{35}{3})$ . ■

**Zadatak 1.63** Zadani su vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  takvi da je  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ . Razložiti vektor  $\vec{c}$  pomoću  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  ako je  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 10$  te  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 2$ .

**Rješenje.**

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$

**Zadatak 1.64** Zadani su vektori  $\vec{a} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \frac{7}{3}\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$  i  $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ . Odredite vektor  $\vec{x}$  ako je  $\vec{x} \cdot \vec{a} = 2$  i  $(\frac{1}{3}\vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$ . ■

**Rješenje.**

$$\vec{x} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}.$$

**Zadatak 1.65** Zadani su vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$  i  $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{k}$ . Jesu li vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  linearno zavisni? Odrediti vektore  $\vec{c}$  i  $\vec{d}$  takve da je vektor  $\vec{c}$  linearno zavisan od vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ , te vektor  $\vec{d}$  linearno nezavisan od vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ . ■

**Rješenje.**

Vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  su linearno nezavisni.

Primjer vektora koji je linearno zavisan od vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ :  $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{k} = \vec{a} + \vec{b}$ .

Primjer vektora koji je linearno nezavisan od vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ :  $\vec{d} = 14\vec{j} = \vec{a} \times \vec{b}$ . ■

**Zadatak 1.66** Točke  $A = (-3, 2, 0)$ ,  $B = (-1, -2, 0)$ ,  $C = (3, -3, 1)$  i  $D = (5, 0, 2)$  uzastopni su vrhovi paralelograma  $ABCD$ . Odrediti kut između dijagonala paralelograma.

**Rješenje.**

$$\varphi \approx 57,58^\circ.$$

**Zadatak 1.67** Zadani su vektori  $\vec{a} = (-1, 3, 2)$ ,  $\vec{b} = (2, \alpha, -4)$  i  $\vec{c} = (\alpha, 12, 6)$ . ■

a) Izračunati volumen paralelopipeda kojeg razapinju vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$ ;

b) Odrediti  $\alpha$  tako da vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  budu komplanarni.

**Rješenje.**

a)  $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |-2\alpha^2 - 18\alpha - 36|;$

b) Vrijedi:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  su komplanarni (leže u istoj ravnini)  $\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ .

Vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  su komplanarni za  $\alpha = -6$  ili  $\alpha = -3$ . ■

**Zadatak 1.68** Naći duljine stranica i mjere kutova trokuta s vrhovima  $A = (-1, 2, 3)$ ,  $B = (2, 1, 2)$ ,  $C = (0, 3, 0)$ .

**Rješenje.**

$$a = \sqrt{12}, \quad b = \sqrt{11}, \quad c = \sqrt{11}, \quad \alpha \approx 62,96^\circ, \quad \beta \approx 58,52^\circ, \quad \gamma \approx 58,52^\circ.$$

**Zadatak 1.69** Neka je  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 19$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ . Odrediti  $|\vec{a} - \vec{b}|$ .**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned} 576 &= 24^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 169 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 361 \\ \Leftrightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 576 - 169 - 361 = 46 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 23}. \end{aligned}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &= \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 169 - 46 + 361 \\ &= 484 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\vec{a} - \vec{b}| = 22}. \end{aligned}$$

**Zadatak 1.70** Zadani su vektori  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  i  $\vec{c} = 13\vec{i} + 2\vec{j}$ . Odredite vektor  $\vec{x}$  inteziteta  $\sqrt{6}$ , koji je okomit na vektor  $\vec{a}$ , s vektorom  $\vec{c}$  zatvara šiljasti kut, a površina paralelograma konstruiranog nad vektorima  $\vec{b}$  i  $\vec{x}$  iznosi  $2\sqrt{5}$ .**Rješenje.**

$$\vec{x} = (1, -2, 1).$$

**Zadatak 1.71** Odrediti jedinični vektor okomit na vektore  $\vec{a} = -2\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$  i  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$  koji s vektorom  $\vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j}$  zatvara šiljasti kut. U smjeru tog jediničnog vektora odrediti vektor  $\vec{d}$  takav da vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{d}$  budu stranice paralelopipeda čiji volumen iznosi 18.**Rješenje.**

$$\vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}, \quad \vec{d} = 6\vec{u}.$$

**Zadatak 1.72** Odrediti obujam i oplošje trostrane piramide čiji su vrhovi točke:  $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (2, 3, 5)$ ,  $C = (6, 2, 3)$  i  $D = (3, 7, 2)$ .**Rješenje.**

$$V_T = |(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = 20, \quad O_T \approx 56,21.$$

**Zadatak 1.73** Vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  razapinju paralelopiped volumena 10. Izračunati volumen paralelopipeda kojega razapinju vektori  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$  i  $\frac{3}{2}\vec{c}$ .

**Rješenje.**

$$V = 30.$$

**Zadatak 1.74** Pokazati da točke  $A = (3, -4, 1)$ ,  $B = (2, -3, 7)$ ,  $C = (1, -4, 3)$  i  $D = (4, -3, 5)$  leže u jednoj ravni. ■

**Rješenje.**

Za netrivialne vektore  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  i  $\vec{AD}$  vrijedi:

$$(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0 \Leftrightarrow \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \text{ komplanarni (leže u istoj ravni)}$$

$$\Leftrightarrow \text{točke } A, B, C \text{ i } D \text{ leže u jednoj ravni!}$$

Za određivanje vektora između dvije točke zadane u pravokutnim koordinatama, koristimo razliku njihovih koordinata, tj. vrijedi:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (-1, 1, 6),$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A) = (-2, 0, 2),$$

$$\vec{AD} = (x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A) = (1, 1, 4).$$

Sada je:

$$\begin{aligned} (\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) &= (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \text{razvoj po 2. stupcu} \\ &= - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -(-8 - 2) - (-2 + 12) \\ &= 10 - 10 = \boxed{0}. \end{aligned}$$

Dakle, točke  $A, B, C$  i  $D$  leže u jednoj ravni!

**Zadatak 1.75** U trokutu  $\triangle ABC$  zadano je  $|\vec{AB}| = 2$ ,  $|\vec{AC}| = 3$ ,  $\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ . Odrediti kut između vektora  $\vec{BC}$  i  $\vec{AM}$  gdje je  $M$  polovište dužine  $\overline{BC}$ . ■

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \quad \text{i} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3.$$

Nadalje, označimo  $\varphi = \angle(\vec{AM}, \vec{BC})$ . Sada je:

$$\vec{AM} \cdot \vec{BC} = \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right)(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{1}{2}|\vec{AC}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{AB}|^2 = \frac{5}{2},$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{BC}| &= \sqrt{\vec{BC} \cdot \vec{BC}} = \sqrt{(\vec{AC} - \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} - \vec{AB})} \\
 &= \sqrt{|\vec{AC}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AB}|^2} = \sqrt{7},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\vec{AM}| &= \sqrt{\vec{AM} \cdot \vec{AM}} = \frac{1}{2} \sqrt{(\vec{AC} + \vec{AB}) \cdot (\vec{AC} + \vec{AB})} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AC}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AB}|^2} = \frac{1}{2} \sqrt{19}.
 \end{aligned}$$

Konačno je:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AM} \cdot \vec{BC}}{|\vec{AM}| |\vec{BC}|} = \frac{5}{\sqrt{133}},$$

odnosno

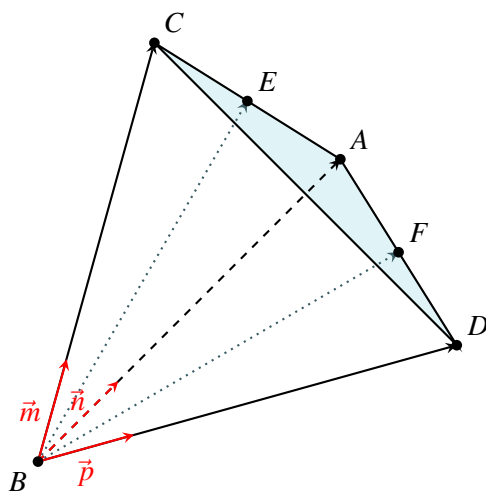
$$\varphi \approx 64^\circ 18' 24''.$$

**Zadatak 1.76** Iz proizvoljnog vrha **pravilnog** tetraedra<sup>19</sup> povučene su simetrale dviju strana tog tetraedra. Koliki je kut  $\varphi$  među tim simetralama?

**Rješenje.**

Ako fiksiramo vrh  $B$ , neka tada vektori  $\vec{BE}$  i  $\vec{BF}$  određuju simetrale kuta pri tom vrhu, u trokutovima  $\triangle BAC$  i  $\triangle BAD$  (vidi sliku ispod). Očito su ti vektori respektivno **kolinearni** s vektorima  $\vec{s}_1 = \vec{m} + \vec{n}$  i  $\vec{s}_2 = \vec{n} + \vec{p}$ , gdje su  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  i  $\vec{p}$  jedinični vektori vektora  $\vec{BC}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{BD}$ , redom. Nadalje, vrijedit će:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \dots = \frac{5}{6} \Rightarrow \varphi \approx 33^\circ 33' 26''.$$



<sup>19</sup> Pravilni tetraedar omeđen je s četiri **jednakostranična** trokuta.



## 2. Analitička geometrija prostora $E^3$

### 2.1 Osnovni pojmovi i formule

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s osnovnim elementima analitičke geometrije prostora  $E^3$ , točkom, pravcem i ravinom i njihovim međusobnim odnosima. Osnovna ideja analitičke geometrije je da se točke prostora  $E^3$  opisuju *koordinatama*, dakle, uređenim trojkama realnih brojeva, a ostali točkovni podskupovi ili objekti tog prostora (pravci, ravnine, krivulje, plohe, itd.) jednačbama. Prema tome, ispitivanje odnosa među promatranim objektima prostora  $E^3$  svodi se na rješavanje sustava jednačbi. Glavna prednost analitičkog pristupa jest u tome što omogućuje precizno i sustavno proučavanje prostornih odnosa korištenjem algebarskih metoda.

**Koordinate.** Položaj neke točke  $T$  u prostoru  $E^3$  možemo opisati pomoću više različitih *koordinatnih sustava*. Najčešće koristimo pravokutni ili Kartezijev, cilindrični i sferni koordinatni sustav. Pravokutni koordinatni sustav u prostoru  $E^3$  prethodno smo (vidi odjeljak 1.5) definirali pomoću tri međusobno okomite koordinatne osi:  $x$ -osi,  $y$ -osi i  $z$ -osi – koje prolaze nekom fiksnom točkom  $O$  prostora  $E^3$  i na kojima leže međusobno okomiti jedinični vektori  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ . Sjecište  $O$  koordinatnih osi nazivamo *ishodištem* pravokutnog koordinatnog sustava. Ravnine  $\zeta = [\vec{i}, \vec{j}]$ ,  $\xi = [\vec{j}, \vec{k}]$ ,  $\eta = [\vec{k}, \vec{i}]$ , određene koordinatnim osima, nazivamo *koordinatne ravnine* zadanog sustava (u nastavku ćemo koordinatne ravnine označavati sa  $xOy$ ,  $yOz$  i  $xOz$ ). Svakoj točki  $T$  u prostoru  $E^3$  tako se može jednoznačno pridružiti uređena trojka realnih brojeva  $(x, y, z)$ , koji predstavljaju njezine pravokutne *koordinate* (a njihove apsolutne vrijednosti su udaljenosti te točke od tri međusobno okomite koordinatne ravnine). Koordinate  $x, y, z$  nazivamo redom *apscisom*, *ordinatom* i *aplikatom* točke  $T$ . Oznaka  $T = (a, b, c)$  označava da točka  $T$  ima pravokutne koordinate  $x = a$ ,  $y = b$  i  $z = c$ . Dodatno, radij-vektor  $\vec{OT}$  svake točke  $T = (x, y, z)$  iz  $E^3$  posve je određen njezinim pravokutnim koordinatama:

$$\vec{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

(pravokutne koordinate točke odgovaraju komponentama radij-vektora). Dakle, u izgradnji analitičke geometrije ćemo, osim točkovne strukture u  $E^3$ , koristiti i vektorske strukture iz  $\mathbb{V}^3(O)$ , odnosno  $\mathbb{V}^3$ , koje se prirodno prožimaju. Konačno, pravokutne koordinate nisu samo opis točke i njezina radij-vektora, već i alat za računanje udaljenosti, kutova, smjerova i drugih prostornih odnosa.

Predznaci koordinata  $x$ ,  $y$  i  $z$  ovise o **oktantu** u kojem se točka nalazi (osmina prostora koja nastaje kada koordinatne ravnine podijele prostor – same koordinatne ravnine nisu ni u jednome oktantu, i svaki je od osam oktanata određen izborom pozitivnoga ili negativnoga predznaka pravokutnih koordinata točaka):

| Oktant | $x$ | $y$ | $z$ |
|--------|-----|-----|-----|
| I.     | +   | +   | +   |
| II.    | –   | +   | +   |
| III.   | –   | –   | +   |
| IV.    | +   | –   | +   |

| Oktant | $x$ | $y$ | $z$ |
|--------|-----|-----|-----|
| V.     | +   | +   | –   |
| VI.    | –   | +   | –   |
| VII.   | –   | –   | –   |
| VIII.  | +   | –   | –   |

**Udaljenost dviju točaka u prostoru.** Neka su  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$  dvije točke iz prostora  $E^3$ , zadane svojim koordinatama u odnosu na neki pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav. Njihova udaljenost jednaka je duljini vektora  $\overrightarrow{T_1 T_2}$ . Taj vektor ima u zadanom sustavu komponente (pravokutne koordinate):

$$\overrightarrow{T_1 T_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Stoga, za udaljenost zadanih točaka vrijedi:

$$d(T_1, T_2) = |\overrightarrow{T_1 T_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.1)$$

Funkcija udaljenosti dviju točaka u prostoru zadovoljava mnoga važna svojstva metrike, među kojima su četiri aksioma metrike, odnosno **nenegativnost**, **strogost**, **simetričnost** i tzv. **relacija trokuta**:

$$\begin{aligned}
 (\text{AM1}) \quad & d(A, B) \geq 0, \\
 (\text{AM2}) \quad & d(A, B) = 0 \text{ ako i samo ako } A = B, \\
 (\text{AM3}) \quad & d(A, B) = d(B, A), \\
 (\text{AM4}) \quad & d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C),
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

za bilo koje  $A, B, C \in E^3$  (aksiom **(AM4)** intuitivno govori da putovanje od točke  $A$  do točke  $C$  preko točke  $B$  ne može biti kraće od izravnoga putovanja između točke  $A$  i točke  $C$ ).

Također, za funkciju udaljenosti dviju točaka u prostoru vrijedi **Ptolemejeva<sup>20</sup> nejednakost**. To je zapravo poopćenje jednog od važnijih teorema u elementarnoj geometriji (**Ptolemejeva teorema<sup>21</sup>**). Neka su  $A, B, C, D$  bilo koje četiri točke u prostoru  $E^3$ . Tada vrijedi nejednakost:

$$ac + bd \geq ef, \quad (2.3)$$

gdje su  $a = d(A, B)$ ,  $b = d(B, C)$ ,  $c = d(C, D)$ ,  $d = d(D, A)$ ,  $e = d(A, C)$  i  $f = d(B, D)$ . Jednakost vrijedi **akko** je  $ABCD$  tetivni četverokut<sup>22</sup>.

**Dijeljenje dužine u zadanom omjeru.** Podijeliti dužinu  $\overline{AB}$  u zadanom omjeru  $a : b = \lambda : 1$  znači odrediti točku  $P$ , na toj dužini, takvu da vrijedi:

$$|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = a : b = \lambda : 1,$$

tj.

$$|\overline{AP}| = \lambda \cdot |\overline{PB}|.$$

Neka su točke  $A = (x_A, y_A, z_A)$  i  $B = (x_B, y_B, z_B)$  iz  $E^3$  zadane svojim pravokutnim koordinatama.

<sup>20</sup> Klaudije Ptolemej (grč. Κλαύδιος Πτολεμαῖος), grčki matematičar i astronom, oko 85. – oko 165.

<sup>21</sup> U svakom tetivnom četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.

<sup>22</sup> Tetivni četverokut je četverokut kojem se može opisati kružnica.

Pravokutne koordinate točke  $P$  za koju je  $\frac{|\overline{AP}|}{|\overline{PB}|} = \frac{a}{b} = \lambda$ , određujemo po formulama:

$$\begin{aligned} x &= \frac{bx_A + ax_B}{a+b} = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \\ y &= \frac{by_A + ay_B}{a+b} = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \\ z &= \frac{bz_A + az_B}{a+b} = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dakle, za koordinate **polovišta**  $P$  dužine  $\overline{AB}$ , koje tu dužinu dijeli u omjeru 1 : 1 ( $\lambda = 1$ ) vrijedi:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z = \frac{z_A + z_B}{2}, \quad (2.5)$$

ili, u vektorskom zapisu

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}. \quad (2.6)$$

**Primjer 2.1** Naći sve točke  $P = (x, y, z)$  koje su podjednako udaljene od ovih četiriju točaka:

$$A = (1, 1, 3), \quad B = (1, 3, 1), \quad C = (3, 1, 1), \quad D = (1, 1, -1).$$

**Rješenje.**

Za traženu točku  $P = (x, y, z)$  vrijedi:

$$d(A, P) = d(B, P) = d(C, P) = d(D, P),$$

odnosno:

$$d^2(A, P) = d^2(B, P) = d^2(C, P) = d^2(D, P).$$

Uvjet  $d^2(A, P) = d^2(B, P)$  ekvivalentan je s:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2,$$

odnosno:

$$y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1 \Rightarrow y = z.$$

Na sličan način se iz uvjeta  $d^2(A, P) = d^2(C, P)$  dobiva  $x = z$ , dok je uvjet  $d^2(A, P) = d^2(D, P)$  ekvivalentan s  $z = 1$ . Dakle, vrijedi  $z = 1$ ,  $x = z = 1$  i  $y = z = 1$ .

Stoga, postoji **samo jedna** točka  $P = (1, 1, 1)$  koja je podjednako udaljena od svih zadanih četiriju točaka.

**Geometrijsko značenje:**

Točka  $P = (1, 1, 1)$  je **središte sfere** koja prolazi kroz sve četiri točke  $A, B, C$  i  $D$ . Polumjer (radijus) te sfere je 2.

**Koordinate težišta.** Za sustav materijalnih točaka  $M_i = (x_i, y_i, z_i)$  s masama  $m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , u prostoru  $E^3$  koordinate težišta (centra mase)  $G = (x_G, y_G, z_G)$  određujemo po formulama:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.7)$$

**Volumen tetraedra (trostrane piramide).** Neka su  $P = (x, y, z)$ ,  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$  vrhovi tetraedra, zadani svojim koordinatama u odnosu na neki pravokutni koordinatni sustav u prostoru  $E^3$ . Volumen tetraedra s vrhovima  $P, P_1, P_2$  i  $P_3$  je:

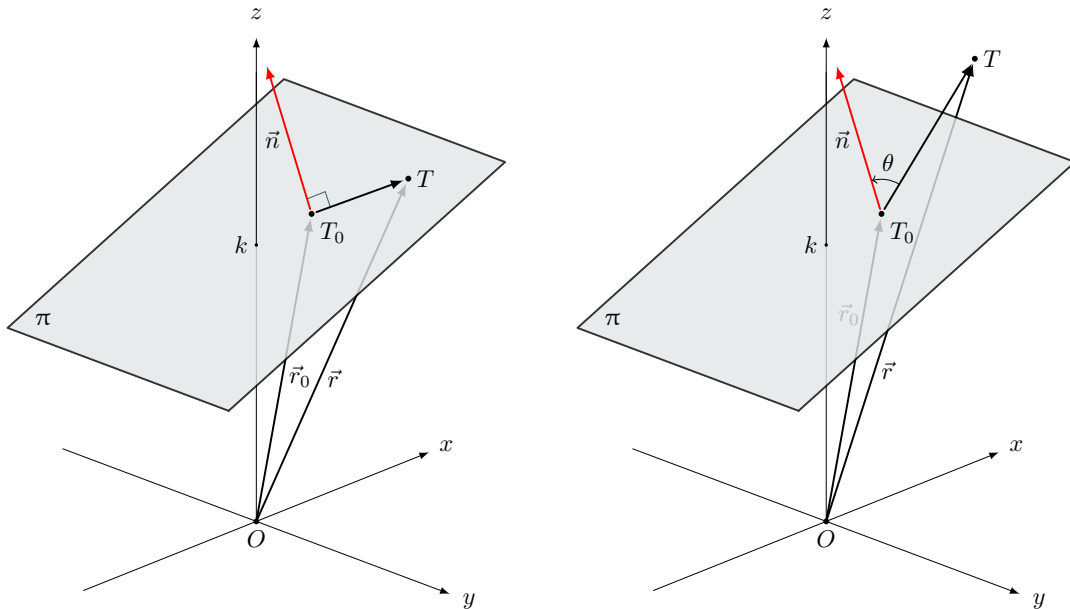
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Formula za volumen tetraedra je u suglasju s primjerom 1.6 i zadatkom 1.45.

## 2.2 Ravnina u prostoru $E^3$

**Razni oblici jednadžbe ravnine.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadani točka  $T_0$  i vektor  $\vec{n} \neq \vec{0}$ . Postoji točno jedna ravnina  $\pi$  koja je **jednoznačno** određena točkom  $T_0 \in \pi$  i vektorom  $\vec{n}$  koji je okomit na tu ravninu. Vektor  $\vec{n}$  naziva se *vektor normale* ravnine  $\pi$  (okomit je na **svaki** vektor koji leži u ravnini  $\pi$ ). Uočimo da tada (vidi Sliku 2.1) za svaku točku  $T$  prostora  $E^3$  vrijedi:

- [i] ako točka  $T$  leži u ravnini  $\pi$ , onda je vektor  $\overrightarrow{TT_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$  okomit na vektor  $\vec{n}$  ( $\overrightarrow{TT_0} \perp \vec{n}$ ), pa vrijedi  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{TT_0} = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ ;
- [ii] ako točka  $T$  **ne** leži u ravnini  $\pi$ , onda vektor  $\overrightarrow{TT_0}$  **nije** okomit na vektor  $\vec{n}$ , a niti je nul-vektor, pa mora biti  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{TT_0} = \vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \neq 0$ .



**Slika 2.1:** Ravnina je određena jednom točkom i vektorom normale.

Nije teško uočiti kako gornje tvrdnje vrijede i u slučaju kada je  $T = T_0$ , jer je tada  $\overrightarrow{TT_0} = \vec{0}$ . Dakle, jednačba

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{TT_0} = 0 \quad (2.9)$$

**razlikuje** točke prostora  $E^3$  na način da sve one točke prostora  $E^3$  koje leže u ravnini  $\pi$  zadovoljavaju tu jednačbu, dok nijedna od preostalih točaka prostora  $E^3$  ne zadovoljava tu jednačbu, pa tu jednačbu nazivamo *osnovnim oblikom* jednačbe ravnine  $\pi$ . Napišemo li vektor  $\overrightarrow{TT_0}$  kao razliku radij-vektora,  $\overrightarrow{TT_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$ , jednačba (2.9) poprima oblik:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (2.10)$$

koji se naziva *opći vektorski oblik* jednačbe ravnine  $\pi$ .

Ako pretpostavimo da je vektor normale ravnine  $\pi$  jedinični vektor  $\vec{n}_0$ , i ako  $\vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0$  označimo sa  $\delta$ , tj.  $\delta = \vec{n}_0 \cdot \vec{r}_0$ , tada prethodni izraz, odnosno jednačba (2.10), poprima oblik:

$$\vec{n}_0 \cdot \vec{r} - \delta = 0 \quad (2.11)$$

odnosno, u koordinatnom obliku

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - \delta = 0 \quad (2.12)$$

koji se naziva *normalni* ili *Hesseov*<sup>23</sup> *oblik* jednačbe ravnine  $\pi$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  su prikloni kutovi vektora  $\vec{n}$ , tj. kutovi koje taj vektor redom zatvara s vektorima  $\vec{i}, \vec{j}$  i  $\vec{k}$ , te vrijedi  $\vec{n}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ ). Dodatno, jednačba (2.12) je **nuždan i dovoljan uvjet** da bi točka  $T = (x, y, z)$  ležala u ravnini  $\pi$ !

Ako su elementi osnovnog oblika jednačbe ravnine  $\pi$  zadani skalarno sa  $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ ,  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  i  $T = (x, y, z)$ , onda imamo:

$$\overrightarrow{TT_0} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k},$$

pa jednačba ravnine  $\pi$  poprima oblik

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (2.13)$$

koji se naziva *skalarna jednačba* ravnine  $\pi$ . Raspisivanjem jednačbe (2.13) dobivamo:

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0,$$

pa uz oznaku  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ , jednačba ravnine  $\pi$  postaje<sup>24</sup>

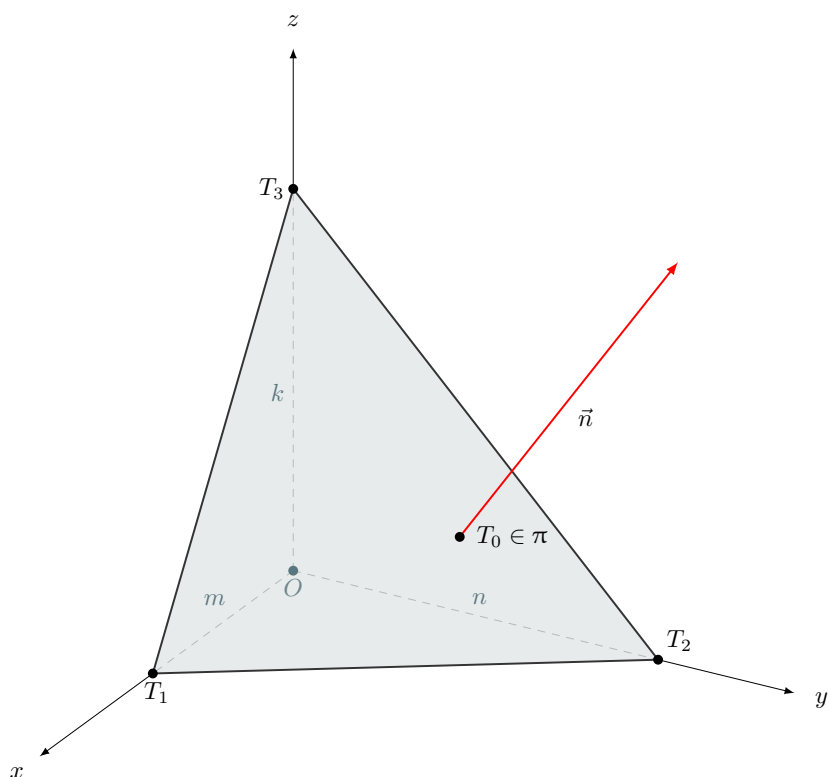
$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.14)$$

što se naziva *opći skalarni oblik* jednačbe ravnine  $\pi$ . Dakle, svaka jednačba s tri nepoznanice predstavlja jednačbu neke ravnine u prostoru  $E^3$ . Sve jednačbe koje se mogu dobiti iz jednačbe ravnine (2.14) njezinim množenjem brojem različitim od nule predstavljaju **istu** ravninu. Dakle, ravnine  $\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  iz  $E^3$  su međusobno jednake, **akko** je:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

<sup>23</sup> Ludwig Otto Hesse, njemački matematičar, 1811.–1874.

<sup>24</sup> Koeficijent  $D$  u općem skalarnom obliku jednačbe ravnine  $Ax + By + Cz + D = 0$  zove se *konstanta ravnine*.



**Slika 2.2:** Ravnina je određena odsječcima  $m, n$  i  $k$  na koordinatnim osima ( $m, n, k \neq 0$ ).

Nadalje, svaki vektor kolinearan s vektorom  $\vec{n} = (A, B, C)$  je također okomit na ravninu određenu jednažbom (2.14), tj. opravdano je smatrati ga vektorom normale ravnine  $\pi$ . Dodatno, za priklone kutove vektora  $\vec{n} = (A, B, C)$  vrijedi:

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ravnina  $\pi \dots AX + BY + Cz + D = 0$  prolazi ishodištem koordinatnog sustava **akko** je  $D = 0$ ! Ako je  $A = 0$  tada je  $\vec{n} = B\vec{j} + C\vec{k}$ , te je vektor  $\vec{n}$  komplanaran s vektorima  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$ , odnosno normalan na os apscisa, pa je ravnina  $\pi \dots By + Cz + D = 0$  **paralelna** s osi apscisa. Analogno zaključujemo kako je za  $B = 0$  ravnina  $\pi \dots Ax + Cz + D = 0$  paralelna s osi ordinata, a za  $C = 0$  da je ravnina  $\pi \dots Ax + By + D = 0$  paralelna s osi aplikata. Ako su **svi** koeficijenti u općoj skalarnoj jednažbi ravnine različiti od nule, tada možemo odrediti i *segmentni oblik* jednažbe ravnine  $\pi$ , na način da se opći skalarni oblik jednažbe ravnine, odnosno jednažba (2.14), podijeli s  $-D$ :

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Uvođenjem odgovarajućih oznaka, jednažba ravnine  $\pi$  poprima oblik:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{k} = 1, \tag{2.15}$$

koji se naziva *segmentni oblik* jednažbe ravnine  $\pi$ . Brojevi  $m, n$  i  $k$  ( $m, n, k \neq 0$ ) predstavljaju **odsječke** što ih ravnina  $\pi$  odsijeca na koordinatnim osima. Jednažbu neke ravnine  $\pi$  možemo napisati u segmentnom obliku **akko** ta ravnina **ne** prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

**Primjer 2.2** Zadane su točke  $T_1 = (0, -1, 3)$  i  $T_2 = (1, 3, 5)$ . Napisati u općem vektorskom i općem skalarnom obliku jednadžbu ravnine  $\pi$  koja prolazi kroz točku  $T_1$  i normalna je na vektor  $\overrightarrow{T_1 T_2}$ .

**Rješenje.**

Vektor normale tražene ravnine je:

$$\vec{n} = \overrightarrow{T_1 T_2} = (1, 4, 2),$$

a vektor položaja zadane točke  $T_1$  je:

$$\vec{r}_1 = (0, -1, 3) \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{r}_1 = 2.$$

Opći vektorski oblik jednadžbe tražene ravnine je ( $T_1 \in \pi$ ):

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$$

odnosno

$$(\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}) \cdot \vec{r} - 2 = 0.$$

Ako u posljednju jednadžbu umjesto vektora  $\vec{r}$  uvrstimo njegove koordinate  $(x, y, z)$ , tj.  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ , nakon sređivanja dobivamo jednadžbu tražene ravnine u općem skalarnom obliku:

$$\pi \dots x + 4y + 2z - 2 = 0.$$

**Jednadžba ravnine kroz tri točke.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadane tri nekolinearne točke:  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$  i  $T_3 = (x_3, y_3, z_3)$ . Postoji točno jedna ravnina  $\pi$  koja je potpuno određena s ove tri nekolinearne točke. Neka je  $T = (x, y, z)$  bilo koja točka koja će pripadati toj ravnini. Ako leže u istoj ravnini točke  $T$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  i  $T_3$  su komplanarne pa su i vektori  $\overrightarrow{T_1 T}$ ,  $\overrightarrow{T_1 T_2}$  i  $\overrightarrow{T_1 T_3}$  komplanarni, te njihov mješoviti produkt iščezava, tj. mora vrijediti:

$$(\overrightarrow{T_1 T} \times \overrightarrow{T_1 T_2}) \cdot \overrightarrow{T_1 T_3} = 0,$$

odnosno

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.16)$$

ili u ekvivalentnom obliku, ali preglednije (dokaz ostavljamo čitatelju za vježbu)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.17)$$

Relacije (2.16) i (2.17) nazivamo *jednadžbama ravnine kroz tri točke*.

**Jednadžba ravnine kroz dvije točke, paralelna pravcu.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadane dvije točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , te pravac  $p$  s vektorom smjera  $\vec{s}_p = (l, m, n)$ . Postoji točno jedna ravnina  $\pi$  koja je **jednoznačno** određena točkama  $T_1, T_2 \in \pi$  i pravcem  $p$ , s vektorom smjera  $\vec{s}_p = (l, m, n)$ , koji je paralelan toj ravnini. Za jednadžbu te ravnine  $\pi$  vrijedi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0. \quad (2.18)$$

**Jednadžba ravnine kroz jednu točku, paralelna s dva pravca.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadani jedna točka  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i dva pravca  $p_1$  i  $p_2$  s vektorima smjera  $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  i  $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ . Postoji točno jedna ravnina  $\pi$  koja je **jednoznačno** određena točkom  $T_1 \in \pi$  i pravcima  $p_1, p_2$ , s vektorom smjera  $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$  i  $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ , koji su paralelni toj ravnini. Za jednadžbu te ravnine  $\pi$  vrijedi:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.19)$$

**Jednadžbe ravnina kroz presječnicu dviju ravnina.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadane dvije ravnine  $\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Dvije ravnine (u općem položaju) sijeku se duž jednog pravca, tzv. presječne. Uvjet za to je da njihovi vektori normala  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  i  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  ne budu kolinearni. Postoji beskonačno mnogo ravnina (familija ravnina) koje prolaze kroz presječnicu ravnina  $\pi_1$  i  $\pi_2$ . Za jednadžbe tih ravnina vrijedi:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}). \quad (2.20)$$

Jednadžba (2.20) u biti predstavlja jednadžbu *pramena (sveska) ravnina*. Ako se  $\lambda$  mijenja od  $-\infty$  do  $+\infty$  dobivamo sve ravnine pramena. Pri  $\lambda = \pm 1$  dobivamo jednadžbe (dviju) ravnina koje raspolavljaju (polove) kutove među zadanim ravninama. Tri ravnine u prostoru  $E^3$  pripadaju istom pramenu **akko** vrijedi:

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0,$$

gdje su  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  i  $\vec{n}_3$  vektori normala tih ravnina.

**Snop (svežanj) ravnina.** *Snop (svežanj) ravnina* u prostoru  $E^3$  je skup svih ravnina u tom prostoru koje prolaze istom (zadanom) točkom  $T_0$ , tzv. *vrhom snopa ravnina*. Neka je  $\vec{r}_0$  radij-vektor točke  $T_0$ . Onda je, uz **varijabilni** vektor  $\vec{n}$ ,

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad (2.21)$$

*jednadžba snopa (svežnja) ravnina.*

Koordinate sjecišta triju ravnina u prostoru  $E^3$ , zadanih jednadžbama

$$\begin{aligned} \pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ \pi_3 \dots A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned} \quad (\clubsuit)$$

računaju se prema formulama:

$$x_0 = \frac{-\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{-\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{-\Delta_z}{\Delta}, \quad (2.22)$$

gdje su

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$
(2.23)

Dakle, tri ravnine ( $\clubsuit$ ) u prostoru  $E^3$  sijeku se u jednoj točki  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  ako je  $\Delta \neq 0$ . Ako je  $\Delta = 0$  i ako je **barem jedna** njezina poddeterminanta drugog reda različita od nule, ravnine ( $\clubsuit$ ) su paralelne nekom pravcu. Ako su u determinanti  $\Delta$  **sve** njezine poddeterminante drugog reda  $= 0$ , ravnine ( $\clubsuit$ ) prolaze kroz (jedan) zajednički pravac. (Pojmovi determinante i njezine poddeterminante definirani su u poglavlju **Matrice i determinante**.)

Četiri ravnine u prostoru  $E^3$ , zadane jednadžbama

$$\begin{aligned} \pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ \pi_3 \dots A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \\ \pi_4 \dots A_4x + B_4y + C_4z + D_4 &= 0, \end{aligned}$$
( $\clubsuit$ )

prolaze istom točkom  $T_0$  ako vrijedi:

$$\Delta_{\clubsuit} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$
(2.24)

U ovom slučaju ( $\Delta_{\clubsuit} = 0$ ) zajedničku točku  $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E^3$  četiri ravnine ( $\clubsuit$ ) određujemo kao sjecište **bilo koje tri** od četiri ravnine ( $\clubsuit$ ). Dakle, u tom je slučaju jedna od jednadžbi ( $\clubsuit$ ) suvišna, odnosno ona je posljedica triju ostalih.

**Kut između dviju ravnina.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadane dvije ravnine  $\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ . Kut između ravnina  $\pi_1$  i  $\pi_2$ , odnosno  $\varphi = \angle(\pi_1, \pi_2)$ , određen je kutom između vektora normala  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  ovih ravnina, i kosinus tog kuta računamo po formuli:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$
(2.25)

odnosno (pod kutom  $\varphi = \angle(\pi_1, \pi_2)$  razumijevamo mjerni broj manjeg od dvaju suplementarnih kutova koje zatvaraju ravnine  $\pi_1$  i  $\pi_2$ )

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$
(2.26)

**Uvjet okomitosti dviju ravnina.** Iz posljednje formule neposredno čitamo **nuždan i dovoljan** uvjet za okomitost dviju ravnina iz prostora  $E^3$ . Ravnine  $\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i

$\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  iz  $E^3$  su međusobno okomite ako za koordinate vektora normala  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  ovih ravnina vrijedi:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \quad (2.27)$$

ili u vektorskom obliku, ako vrijedi  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ .

**Uvjet paralelnosti dviju ravnina.** Ravnine  $\pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  iz  $E^3$  su međusobno paralelne ako za koordinate vektora normala  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  ovih ravnina vrijedi:

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.28)$$

ili u vektorskom obliku, ako vrijedi  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0}$ .

**Udaljenost točke od ravnine.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadani neka ravnina  $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$  i neka točka  $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \notin \pi$ . Udaljenost točke  $T_1$  do ravnine  $\pi$  jednaka je udaljenosti točke  $T_1$  do njezine ortogonalne projekcije  $T'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$  na ravninu  $\pi$ . Ovu udaljenost dobivamo tako da u normalnoj jednadžbi (2.12) te ravnine  $\pi$  zamijenimo nepoznanice  $x, y$  i  $z$  redom s odgovarajućim koordinatama točke  $T_1(x_1, y_1, z_1)$ . Dobiveni broj predstavlja traženu udaljenost, tj. vrijedi:

$$d(T_1, \pi) = x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - \delta, \quad (2.29)$$

Nije teško zaključiti kako će ta udaljenost biti pozitivna ili negativna, već prema tome jesu li točke  $T_1$  i  $O$  (ishodište koordinatnog sustava) s raznih strana ili s iste strane ravnine  $\pi$ . Nadalje, očito je kako za bilo koju točku  $T_0 \in \pi$  vrijedi  $d(T_0, \pi) = 0$ .

Iz poznate veze između općega skalarnoga (2.14) i normalnoga oblika jednadžbe (2.12) ravnine  $\pi$ , udaljenost neke točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$  (iz prostora  $E^3$ ) do ravnine  $\pi$  možemo iskazati i u obliku (uz uvjet da je  $D \neq 0$ ):<sup>25</sup>

$$d(T_1, \pi) = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{(-\operatorname{sgn} D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow |d(T_1, \pi)| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.30)$$

Dodatno, ako je  $T_0 = (x_0, y_0, z_0)$  proizvoljna točka zadane ravnine  $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$ , udaljenost neke točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$  do ravnine  $\pi$  se može dobiti i s pomoću formule:

$$d(T_1, \pi) = \frac{|\overrightarrow{T_0T_1} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (\overrightarrow{T_0T_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \vec{n} = (A, B, C)). \quad (2.31)$$

**Udaljenost dviju paralelnih ravnina.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadane dvije paralelne ravnine  $\pi_1 \dots Ax + By + Cz + D_1 = 0$  i  $\pi_2 \dots Ax + By + Cz + D_2 = 0$ . Udaljenost dviju paralelnih ravnina  $\pi_1$  i  $\pi_2$  računamo po formuli:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (2.32)$$

Nije teško uočiti kako se udaljenost dviju paralelnih ravnina može definirati kao udaljenost bilo koje točke s jedne ravnine do druge ravnine. Nadalje, ako se dvije ravnine sijeku, udaljenost im je nula.

<sup>25</sup> Funkcija *signum* (predznak) označava se simbolom  $\operatorname{sgn}$  i  $\forall x \in \mathbb{R}$  definira formulom  $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

**Primjer 2.3** Odrediti jednadžbu ravnine koja je određena s tri točke  $T_1 = (1, -1, 2)$ ,  $T_2 = (2, 1, 2)$  i  $T_3 = (1, 1, 4)$ . Zatim, odrediti udaljenost točke  $M = (2, 3, 5)$  od te ravnine.

**Rješenje.**

Uvrštavanjem koordinata zadanih točaka u jednadžbu (2.16) dobivamo:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 2-1 & 1+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+1 & 4-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(x-1) + 2(z-2) - 2(y+1) = 0,$$

odnosno

$$\pi \dots 4x - 2y + 2z - 10 = 0.$$

Dakle, vektor normale ove ravnine je  $\vec{n} = (4, -2, 2)$ . Sada, prema formuli (2.30) za udaljenost točke od ravnine, vrijedi:

$$d = d(M, \pi) = \frac{4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 10}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$



**Primjer 2.4** Napisati jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (2, 5, -3)$  i presječnicu ravnina  $\pi_1 \dots 3x - y - z - 5 = 0$  i  $\pi_2 \dots x + 2z = 0$ .

**Rješenje.**

Tražena ravnina pripada **pramenu ravnina** koji je određen ravninama  $\pi_1$  i  $\pi_2$ . Jednadžba tog pramena je:

$$3x - y - z - 5 + \lambda(x + 2z) = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

U ovu jednadžbu uvrštavamo koordinate zadane točke  $T$ , pa vrijedi:

$$6 - 5 + 3 - 5 + \lambda(2 - 6) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4}.$$

Sada dobivenu vrijednost parametra  $\lambda$  "vraćamo" u jednadžbu pramena:

$$3x - y - z - 5 - \frac{1}{4}(x + 2z) = 0,$$

te nakon sređivanja dobivamo opću jednadžbu tražene ravnine u skalarnom obliku:

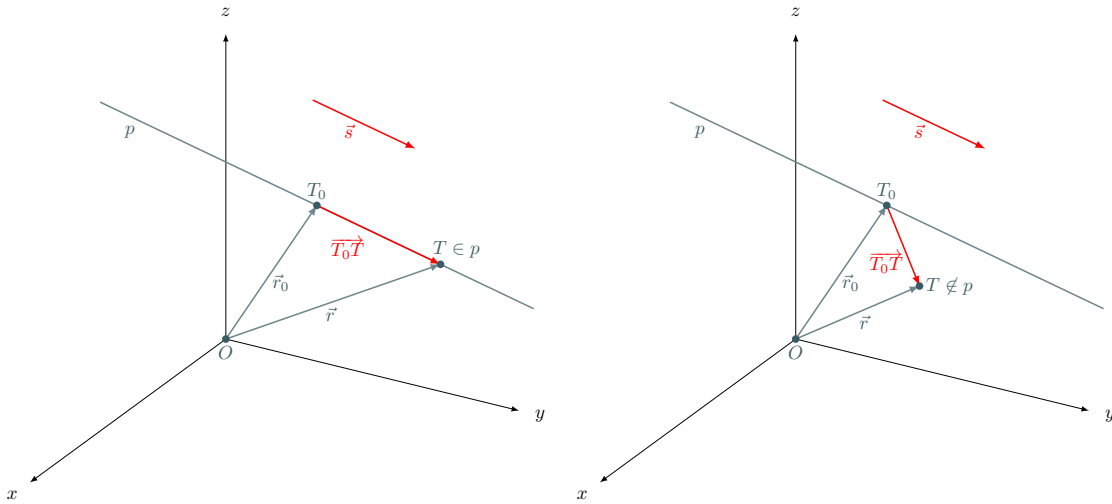
$$\pi \dots 11x - 4y - 6z - 20 = 0.$$



### 2.3 Pravac u prostoru $E^3$

**Razni oblici jednadžbe pravca.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadani točka  $T_0$  i vektor  $\vec{s} \neq \vec{0}$ . Postoji točno jedan pravac  $p$  koji je **jednoznačno** određen točkom  $T_0 \in p$  i vektorom  $\vec{s}$  koji je paralelan s tim pravcem. Vektor  $\vec{s}$  naziva se *vektor smjera* pravca  $p$  (kolinearan je sa **svakim** drugim vektorom koji leži na pravcu  $p$ ). Uočimo da tada (vidi Sliku 2.3) za svaku točku  $T$  prostora  $E^3$  vrijedi:

- [i] ako točka  $T$  leži na pravcu  $p$ , onda je vektor  $\overrightarrow{T_0T} = \vec{r} - \vec{r}_0$  kolinearan s vektorom  $\vec{s}$ , pa vrijedi  $\overrightarrow{T_0T} = \lambda \vec{s}$ , odnosno  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{s} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ ;
- [ii] ako točka  $T$  **ne** leži na pravcu  $p$ , onda vektor  $\overrightarrow{T_0T}$  **nije** kolinearan s vektorom  $\vec{s}$ , pa mora biti  $\overrightarrow{T_0T} \neq \lambda \vec{s}$ .



**Slika 2.3:** Pravac je određen jednom točkom i vektorom smjera.

Nije teško uočiti kako gornje tvrdnje vrijede i u slučaju kada je  $T = T_0$ , jer je tada  $\overrightarrow{T_0T} = \vec{0}$ . Dakle, jednadžba

$$\overrightarrow{T_0T} = \lambda \vec{s} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (2.33)$$

**razlikuje** točke prostora  $E^3$  na način da sve one točke prostora  $E^3$  koje leže na pravcu  $p$  zadovoljavaju tu jednadžbu, dok nijedna od preostalih točaka prostora  $E^3$  ne zadovoljava tu jednadžbu, pa tu jednadžbu nazivamo *osnovnim oblikom* jednadžbe pravca  $p$ . Napišemo li vektor  $\overrightarrow{T_0T}$  kao razliku radij-vektora,  $\overrightarrow{T_0T} = \vec{r} - \vec{r}_0$ , jednadžba (2.33) poprimit će oblik:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{s} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad (2.34)$$

koji se naziva *vektorski oblik parametarske* jednadžbe pravca  $p$ .

Ako su, u odnosu na zadani pravokutni koordinatni sustav  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,  $\vec{r} = (x, y, z) = T$ ,  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) = T_0$ ,  $\vec{s} = (l, m, n)$ , iz (2.34) dobivamo tri jednadžbe:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m, \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = z_0 + \lambda n \end{cases} \quad (2.35)$$

koje predstavljaju *skalarni oblik parametarske* jednadžbe pravca  $p$ .

Ako su sve komponente vektora  $\vec{s}$  različite od nule, parametar  $\lambda \in \mathbb{R}$  se može eliminirati, pa iz (2.35) dobivamo tzv. *kanonske* jednadžbe pravca  $p$  (ili *kanonski zapis* pravca  $p$ ):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (2.36)$$

**Primjer 2.5** Napisati kanonske i skalarne parametarske jednadžbe pravca koji prolazi kroz točku  $T_0 = (5, 1, 2)$  i paralelan je vektoru  $\vec{s} = (-1, 3, 2)$ . Zatim, odrediti nekoliko točaka na tom pravcu.

#### Rješenje.

Uvrštavanjem koordinata zadane točke  $T_0$  i zadanoga vektora  $\vec{s}$  u sustav jednadžbi (2.36) dobivamo kanonske jednadžbe pravca  $p$  koji je njima jednoznačno određen:

$$p \dots \frac{x - 5}{-1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - 2}{2}.$$

Skalarne parametarske jednadžbe traženog pravca dobit ćemo uvrštavanjem koordinata zadane točke  $T_0$  i zadanoga vektora  $\vec{s}$  u sustav jednadžbi (2.35). Vrijedi:

$$p \dots \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = 1 + 3\lambda, \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$$

Sada je, za dobiti nekoliko točaka na pravcu  $p$ , dovoljno dodijeliti nekoliko, po volji odabranih, različitih vrijednosti realnom parametru  $\lambda$ , koristeći skalarne parametarske jednadžbe ovog pravca. Dakle, imamo:

| $\lambda$ | $x$ | $y$ | $z$ | Točka             |
|-----------|-----|-----|-----|-------------------|
| 1         | 4   | 4   | 4   | $A = (4, 4, 4)$   |
| -1        | 6   | -2  | 0   | $B = (6, -2, 0)$  |
| 2         | 3   | 7   | 6   | $C = (3, 7, 6)$   |
| -2        | 7   | -5  | -2  | $D = (7, -5, -2)$ |

Napomenimo kako je uobičajeno služiti se zapisom (2.36) i u slučajevima kad su neke komponente vektora  $\vec{s}$  jednake nuli. Drugim riječima kanonske jednadžbe pravca ne treba shvaćati strogo kao jednakost triju razlomaka. Tako na primjer, zapisom

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z + 2}{-1}$$

smatramo da je određen pravac koji prolazi točkom  $T_0 = (2, 1, -2)$  a ima vektor smjera  $\vec{s} = 3\vec{i} - \vec{k}$ .

Izraz  $\frac{y - 1}{0}$  predstavlja samo *formalni* zapis, i interpretiramo ga na način:

! y mora biti jednak 1.

I zaista, svaka točka ovoga pravca ima ordinatu jednaku 1.

Nadalje, često se za vektor smjera  $\vec{s}$  promatranog pravca uzima pripadajući jedinični vektor  $\vec{s}_0 = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$ .

Tada zapis (2.36) poprima oblik:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\cos \beta} = \frac{z - z_0}{\cos \gamma}, \quad (2.37)$$

gdje su  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  prikloni kutovi vektora  $\vec{s}$ , pa mora vrijediti  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

**Jednadžba pravca kroz dvije točke.** Temeljno svojstvo svakog pravca u prostoru  $E^3$  jest da je posve određen sa bilo koje dvije različite točke tog prostora. To načelo potječe još iz antičke grčke geometrije, a najčešće se pripisuje Euklidu<sup>26</sup>. U njegovom djelu *Elementi*, koje je temelj zapadne geometrije, ova tvrdnja nije izrečena kao *aksiom*, ali se koristi kao temeljna intuitivna istina. Neka su u prostoru  $E^3$  zadane dvije različite točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1)$  i  $T_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . Postoji točno jedan pravac  $p$  koji je *jednoznačno* određen točkama  $T_1, T_2 \in p$ . Taj će pravac imati smjer kao vektor

$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1 T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

pa prema (2.34) imamo

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$

odnosno

$$\vec{r} = (1 - \lambda)\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2 \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad (2.38)$$

i to je *vektorski oblik parametarske* jednadžbe pravca kroz dvije zadane točke. Ako jednadžbu (2.38) zapišemo koordinatno, tj. u obliku:

$$\begin{cases} x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2 \\ y = (1 - \lambda)y_1 + \lambda y_2, \lambda \in \mathbb{R}, \\ z = (1 - \lambda)z_1 + \lambda z_2 \end{cases} \quad (2.39)$$

dobivamo *skalarni oblik parametarske* jednadžbe pravca kroz dvije zadane točke u prostoru  $E^3$ . Konačno, eliminacijom realnog parametra  $\lambda$  iz (2.39), dobivamo

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (2.40)$$

i to su *kanonske* jednadžbe pravca kroz dvije točke u  $E^3$ .

**Pravac kao presječnica dviju ravnina.** Ako u prostoru  $E^3$  dvije ravnine  $\pi_1$  i  $\pi_2$  nisu paralelne, onda one jednoznačno određuju pravac  $p$ . Dakle, svaki pravac u prostoru  $E^3$  može se zadati kao presjek dviju različitih neparalelnih ravnina, tj. analitički je određen linearnim sustavom dviju linearno nezavisnih (realnih) jednadžbi s tri nepoznanice, od kojih svaka predstavlja jednu ravninu u prostoru:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}, \quad (2.41)$$

<sup>26</sup> Euklid (grč. Εὐκλείδης), grčki matematičar, oko 330. prije Krista – oko 275. prije Krista.

gdje, očito, mora biti ispunjeno

$$A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2, \quad (2.42)$$

jer bi u protivnom ravnine (2.41) bile paralelne i ne bi određivale pravac. Sustav (2.41), uz uvjet (2.42), nazivamo *opće* jednadžbe pravca.

**Snop pravaca.** Snop pravaca u prostoru  $E^3$  je skup svih pravaca u tom prostoru koji prolaze nekom čvrstom točkom  $T_0 \in E^3$ , tzv. *vrhom snopa pravaca*.

**Pramen pravaca.** Pramen pravaca u prostoru  $E^3$  je skup svih pravaca u tom prostoru koji prolaze nekom čvrstom točkom  $T_0 \in E^3$  i leže u jednoj te istoj ravnini koja prolazi kroz točku  $T_0$ .

**Kut između dva pravca.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadana dva pravca  $p_1$  i  $p_2$ , koji za vektore smjera imaju vektore  $\vec{s}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$  i  $\vec{s}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ . Kut između pravaca  $p_1$  i  $p_2$ , označen s  $\varphi = \angle(p_1, p_2)$ , definiran je kao manji od dvaju suplementarnih kutova<sup>27</sup>:

$$\angle(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \quad \text{ i } \quad \angle(\vec{s}_1, -\vec{s}_2).$$

Kosinus toga kuta računa se po formuli:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \quad (2.43)$$

**Uvjet okomitosti<sup>28</sup> dvaju pravaca.** Iz posljednje formule neposredno čitamo **nuždan i dovoljan uvjet za okomitost dvaju pravaca** iz prostora  $E^3$ . Pravci  $p_1$  i  $p_2$  iz  $E^3$ , koji za vektore smjera imaju vektore  $\vec{s}_1 = l_1\vec{i} + m_1\vec{j} + n_1\vec{k}$  i  $\vec{s}_2 = l_2\vec{i} + m_2\vec{j} + n_2\vec{k}$ , međusobno su okomiti ako za koordinate vektora smjera  $\vec{s}_1$  i  $\vec{s}_2$  ovih pravaca vrijedi:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \quad (2.44)$$

ili u vektorskom obliku, ako vrijedi  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ .

**Uvjet paralelnosti<sup>29</sup> dvaju pravaca.** Pravci  $p_1$  i  $p_2$  iz  $E^3$  (oznake iste kao gore) međusobno su paralelni ako za koordinate vektora smjera  $\vec{s}_1$  i  $\vec{s}_2$  ovih pravaca vrijedi:

$$l_1 : l_2 = m_1 : m_2 = n_1 : n_2 = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.45)$$

ili u vektorskom obliku, ako vrijedi  $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \vec{0}$ .

**Udaljenost točke od pravca.** Neka su u prostoru  $E^3$  zadani neki pravac  $p$  određen točkom  $T_0 \in p$  i vektorom smjera  $\vec{s} \neq \vec{0}$ , te neka točka  $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \notin p$ . Udaljenost točke  $T_1$  do pravca  $p$  jednaka je udaljenosti točke  $T_1$  do njezine ortogonalne projekcije  $T'_1 = (x'_1, y'_1, z'_1)$  na pravac  $p$ , tj. vrijedi:

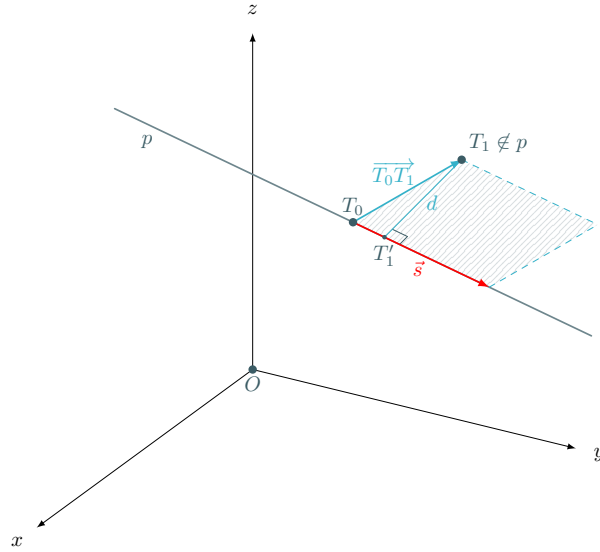
$$d = d(T_1, p) = d(T_1, T'_1) = |\overrightarrow{T_1 T'_1}|.$$

Nije teško uočiti (vidi Sliku 2.4) kako je udaljenost neke točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E^3$ ,  $T_1 \notin p$ , od pravca  $p$  u biti jednaka iznosu visine paralelograma kojeg razapinju vektori  $\overrightarrow{T_0 T_1}$  i  $\vec{s}$ . Budući površinu

<sup>27</sup> Kut između dva pravca u prostoru  $E^3$  je po definiciji **šiljasti** ili **pravi**.

<sup>28</sup> Okomiti pravci se mogu sjeći, ali mogu biti i **mimosmjerni** odnosno **mimoilazni**.

<sup>29</sup> Paralelni pravci mogu, ali ne moraju ležati jedan na drugom. Oba leže u istoj ravnini.



Slika 2.4: Udaljenost točke do pravca.

tog paralelograma možemo odrediti na **dva načina**: pomoću vektorskog produkta (umnoška) dviju njegovih stranica (to su vektori  $\overrightarrow{T_0T_1}$  i  $\vec{s}$ ), te kao umnožak duljine njegove visine i duljine njegove osnovice (to su  $d$  i  $|\vec{s}|$ ), za udaljenost točke  $T_1$  od pravca  $p$  očito vrijedi:

$$d = \frac{|\overrightarrow{T_0T_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|}. \quad (2.46)$$

Ako je pravac  $p$  zadan **kanonskim** jednadžbama (2.36), udaljenost točke  $T_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E^3$  od njega možemo odrediti po formuli:

$$d^2 = \frac{[(x_1 - x_0)m - (y_1 - y_0)l]^2 + [(y_1 - y_0)n - (z_1 - z_0)m]^2 + [(z_1 - z_0)l - (x_1 - x_0)n]^2}{l^2 + m^2 + n^2}. \quad (2.47)$$

**Najkraća udaljenost dvaju mimoilaznih (mimosmjernih) pravaca.** Za svaka dva pravca u prostoru  $E^3$  sigurno je zadovoljen jedan od moguća četiri slučaja:

- [i] pravci se sijeku u **jednoj točki**;
- [ii] pravci su paralelni i **preklapaju se**, tj. sijeku se u  **$\infty$  mnogo točaka**;
- [iii] pravci su paralelni i **ne preklapaju se**, tj. nemaju zajedničkih točaka;
- [iv] pravci su mimoilazni, tj. niti su paralelni niti imaju zajedničkih točaka.

U slučajevima [i] i [ii] udaljenost između njih je jednaka nuli. Ako su u prostoru  $E^3$  dva pravca  $p_1$  i  $p_2$  zadana kanonskim jednadžbama (2.36), najkraću udaljenost među njima možemo izračunati prema formuli (uzimamo +, ako vektori  $(\vec{T_1T_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2)$  u tom redoslijedu čine desnu trojku):

$$d = d(p_1, p_2) = \frac{\pm \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2}}. \quad (2.48)$$

Kada determinanta u brojniku gornjeg izraza postane jednaka nuli, ispunjen je *uvjet presijecanja dvaju pravaca* u prostoru  $E^3$ . Dodatno je:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.49)$$

nuždan i dovoljan uvjet da bi dva pravca u prostoru  $E^3$  ležala u istoj ravnini, tj. **uvjet za komplanarnost dvaju pravaca**.

## 2.4 Međusobni položaj pravca i ravnina u prostoru $E^3$

**Kut između pravca i ravnine.** Promatramo li odnos pravca i ravnine u prostoru  $E^3$  sigurno će vrijediti jedan od moguća tri slučaja:

- [i] pravac može ležati čitav u zadanoj ravnini (s ravinom ima  $\infty$  mnogo zajedničkih točaka);
- [ii] može s njom imati **jednu** zajedničku točku;
- [iii] ili s njom ne imati **ni jednu** zajedničku točku.

U slučajevima [i] i [iii] pravac je *paralelan* s ravinom. Kut između pravca i ravnine u prostoru  $E^3$  definira se kao kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na tu ravninu. Primijetimo kako smo tako kut između pravca i ravnine sveli na kut između dva pravca koji je definiran formulom (2.43), i kako je zbog toga taj kut uvijek **šiljasti**.

Neka su u prostoru  $E^3$  zadani pravac  $p$  i ravnina  $\pi$ . Razabiremo odmah kako je kut  $\psi = \angle(p, \pi)$  **najmanji** od svih kutova što ga zatvara vektor smjera pravca  $p$  s bilo kojim vektorom koji leži u ravnini  $\pi$ . U biti je kut  $\psi$  **komplement** kuta što ga zatvara vektor smjera  $\vec{s}$  pravca  $p$  s vektorom normale  $\vec{n}$  ravnine  $\pi$ , odnosno vrijedi:

$$\psi = \angle(p, \pi) = 90^\circ - \angle(\vec{s}, \vec{n}) = 90^\circ - \theta \quad \Rightarrow \quad \sin \psi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta. \quad (2.50)$$

Dakle, ako je pravac  $p$  zadan svojim kanonskim zapisom  $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ , i ako je ravnina  $\pi$  zadana svojom općom skalarnom jednadžbom  $Ax + By + Cz + D = 0$ , za kut između pravca  $p$  i ravnine  $\pi$  vrijedi formula:

$$\sin \psi = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (2.51)$$

**Uvjet paralelnosti pravca i ravnine.** Pravac  $p$  i ravnina  $\pi$  iz  $E^3$  međusobno su paralelni ako je  $\psi = 0$ . Dakle, iz posljednje formule neposredno čitamo **nuždan i dovoljan uvjet za paralelnost pravca i ravnine** iz prostora  $E^3$  (oznake iste kao gore):

$$Al + Bm + Cn = 0, \quad (2.52)$$

ili u vektorskom obliku  $\vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ .

**Uvjet okomitosti pravca i ravnine.** Pravac  $p$  i ravnina  $\pi$  iz  $E^3$  (oznake iste kao gore) međusobno su okomiti ako za koordinate vektora smjera  $\vec{s}$  pravca  $p$  i vektora normale  $\vec{n}$  ravnine  $\pi$  vrijedi:

$$A : l = B : m = C : n = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (2.53)$$

ili u vektorskom obliku, ako vrijedi  $\vec{s} \times \vec{n} = \vec{0}$ .

**Primjer 2.6** Naći kut između pravca

$$p \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$$

i ravnine  $\pi \dots 10x + 2y - 11z = 3$ .

**Rješenje.**

Vektor normale zadane ravnine  $\pi$  je:

$$\vec{n} = (10, 2, -11),$$

a vektor smjera zadanog pravca  $p$  je:

$$\vec{s} = (2, 3, 6).$$

Dakle, za traženi kut  $\psi = \angle(p, \pi)$  vrijedi:

$$\begin{aligned} \sin \psi &= \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}| |\vec{n}|} = \frac{|A l + B m + C n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{|20 + 6 - 66|}{\sqrt{100 + 4 + 121} \sqrt{4 + 9 + 36}} \\ &= \frac{|-40|}{15 \cdot 7} \\ &= \frac{8}{21} \Rightarrow \boxed{\psi \approx 22,39^\circ}. \end{aligned}$$

**Presjek pravca i ravnine.** U općem slučaju pravac u prostoru  $E^3$  će sijeći ravninu u jednoj točki, dok u posebnom slučaju pravac može ležati u ravnini. Točku *presjeka pravca i ravnine* u prostoru  $E^3$ , odnosno sjecište (probodište ili prodor) pravca i ravnine, najlakše određujemo (pronalazimo) korištenjem parametarskih jednadžbi pravca u skalarnom obliku (2.35). Dakle, napišemo li parametarske jednadžbe (skalarni oblik) zadanog pravca  $p$  u prostoru  $E^3$ :

$$x = x_0 + \lambda l, \quad y = y_0 + \lambda m, \quad z = z_0 + \lambda n, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

i zamijenimo li njima vrijednosti  $x, y, z$  u jednadžbi zadane ravnine  $\pi$ , odnosno uvrstimo li ih u opći skalarni oblik jednadžbe ravnine (2.14), dobivamo **linearanu jednadžbu** s jednom nepoznanicom, parametrom  $\lambda \in \mathbb{R}$ , koju je lako riješiti, odnosno iz koje je jednostavno odrediti realni parametar  $\lambda$  a samim tim i koordinate sjecišta (presjeka) zadanog pravca  $p$  sa zadanom ravinom  $\pi$  (vidi Zadatak 2.38 ili Zadatak 2.89).

Nadalje, ako nam je pravac  $p$  u prostoru  $E^3$  zadan svojim kanonskim zapisom  $p \dots \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ , i ako je ravnina  $\pi$  zadana svojom općom skalarnom jednadžbom  $\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0$ , tada za koordinate njihovog sjecišta  $P$  vrijedi:

$$x_P = x_0 - \rho l, \quad y_P = y_0 - \rho m, \quad z_P = z_0 - \rho n, \quad (2.54)$$

gdje je

$$\rho = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}. \quad (2.55)$$

Ako je  $Al + Bm + Cn \neq 0$  pravac  $p$  i ravnina  $\pi$  se sijeku u **jednoj** točki. Nadalje, u slučaju da je  $Al + Bm + Cn = 0$  i  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$  zadani pravac  $p$  je paralelan ravnini  $\pi$ , a točka  $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in p$  leži izvan ravnine  $\pi$ , pa zadani pravac i ravnina **nemaju** zajedničkih točaka. Konačno, ako je  $Al + Bm + Cn = 0$  i  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$  zadani pravac  $p$  je paralelan zadanoj ravnini  $\pi$ , a točka  $T_0 = (x_0, y_0, z_0) \in p$  leži u toj ravnini. Dakle, pravac  $p$  leži u ravnini  $\pi$  (s ravinom ima  $\infty$  **mnogo** zajedničkih točaka).

Iz posljednje diskusije neposredno čitamo **nuždan i dovoljan** uvjet da pravac  $p$  leži u ravnini  $\pi$  (oznake iste kao gore):

$$Al + Bm + Cn = 0 \quad \text{i} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (2.56)$$

**Primjer 2.7** Odrediti sjecište pravca

$$p \dots \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

i ravnine  $\pi \dots 3x - y + 2z - 4 = 0$ .

**Rješenje.**

Vektor normale i konstanta zadane ravnine  $\pi$  su:

$$\vec{n} = (3, -1, 2), \quad D = -4,$$

a vektor smjera i točka  $T_0$  zadanog pravca  $p$  su:

$$\vec{s} = (-2, 1, 2), \quad T_0 = (0, -1, 1).$$

Dakle, prema formuli (2.55) vrijedi:

$$\rho = \frac{0 + 1 + 2 - 4}{-6 - 1 + 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Stoga, za koordinate traženog sjecišta  $P$  vrijedi:

$$x_P = 0 + \frac{2}{3}, \quad y_P = -1 - \frac{1}{3}, \quad z_P = 1 - \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad P = \left( \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \right).$$



## 2.5 Zadaci

**Zadatak 2.1** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točke  $A = (1, 2, 0)$ ,  $B = (-2, 1, -3)$  i  $C = (3, 4, -2)$ .

**Rješenje.**

Prema formuli (2.16), jednadžba ravnine kroz tri točke je:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ -3 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

odakle, nakon razvijanja **determinante** (vidi odjeljak 3.5), slijedi:

$$x(2+6) + y(-6-6) + z(-6+2) + 16 = 0,$$

odnosno

$$\pi \dots 2x - 3y - z + 4 = 0.$$

**Zadatak 2.2** Napisati jednadžbu ravnine koja sadrži točku  $T = (-2, 1, 3)$  i okomita je na vektor  $\vec{n} = (1, 2, 7)$ . ■

**Rješenje.**

Budući su nam poznati jedna točka ravnine i neki vektor koji je na nju okomit (normalan) dovoljno je u **opći skalarni oblik** jednadžbe ravnine (2.14) uvrstiti

$$x_1 = -2, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 3 \quad \text{i} \quad A = 1, \quad B = 2, \quad C = 7,$$

pa ćemo imati:

$$\pi \dots 1 \cdot (x+2) + 2 \cdot (y-1) + 7 \cdot (z-3) = 0,$$

odnosno jednadžba tražene ravnine glasi

$$\pi \dots x + 2y + 7z - 21 = 0.$$

**Zadatak 2.3** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (1, -1, 2)$ , a paralelna je s ravninom  $\pi \dots x + 2y - 3z + 5 = 0$ . ■

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots x + 2y - 3z + 7 = 0.$$

**Zadatak 2.4** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (1, -1, 2)$ , a okomita je na pravac koji prolazi kroz točke  $A = (2, 1, -3)$  i  $B = (1, -2, 3)$ . ■

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots x + 3y - 6z + 14 = 0.$$

**Zadatak 2.5** Naći kut između ravnina  $\pi_1 \dots x + y - 2z + 3 = 0$  i  $\pi_2 \dots x - 2y + z + 4 = 0$ .

**Rješenje.**

$$\theta = \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{\pi}{3}.$$

**Zadatak 2.6** Zadana je dužina s krajevima  $A = (2, -3, 1)$  i  $B = (-4, 5, 3)$ . Naći jednadžbu ravnine koja prolazi polovištem  $P$  te dužine i stoji na njoj okomito.

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$P = (-1, 1, 2) \quad \text{i} \quad \pi \dots 3x - 4y - z + 9 = 0.$$

**Zadatak 2.7** Napisati jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točke  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (0, 1, -1)$  i okomita je na ravninu  $\rho \dots x + y + z - 1 = 0$ .

**Rješenje.**

Budući da tražena ravnina **sadrži** točke  $A$  i  $B$ , njezin vektor normale je okomit na vektor  $\overrightarrow{AB}$ , a budući je okomita na ravninu  $\rho$  vrijedi:

$$\begin{cases} \vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\rho \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \parallel \vec{n}_\rho \times \overrightarrow{AB} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{n}_\pi = \lambda (\vec{n}_\rho \times \overrightarrow{AB}).$$

Kako je zadano  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (0, 1, -1)$  i  $\rho \dots x + y + z - 1 = 0$ , to je:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 0, -2) \quad \text{i} \quad \vec{n}_\rho = (1, 1, 1).$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \vec{n}_\rho \times \overrightarrow{AB} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-2 - 0)\vec{i} + (-1 + 2)\vec{j} + (0 + 1)\vec{k} \\ &= -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\ &= (-2, 1, 1), \end{aligned}$$

dakle vrijedi:

$$\vec{n}_\pi = \lambda (-2, 1, 1) = (-2\lambda, \lambda, \lambda),$$

gdje je  $\lambda$  neki realan broj,  $\lambda \neq 0$ . Konačno, budući su nam poznati barem jedna točka ravnine i njezin vektor normale, dovoljno je u **opći skalarni oblik** jednadžbe ravnine (2.14) uvrstiti

$$x_1 = 1, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 1 \quad \text{i} \quad A = -2\lambda, \quad B = \lambda, \quad C = \lambda,$$

pa ćemo imati

$$\pi \dots -2\lambda(x - 1) + \lambda(y - 1) + \lambda(z - 1) = 0,$$

odnosno jednačba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots - 2x + y + z = 0.$$

**Zadatak 2.8** Naći jednačbu ravnine koja prolazi kroz točke  $A = (1, -2, 3)$ ,  $B = (2, 1, -1)$  i okomita je na ravninu  $\rho \dots x + 2y - 3z + 1 = 0$ . Zatim, napisati jednačbu presječnice zadane i dobivene ravnine, u kanonskom obliku.

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\pi \dots x + y + z - 2 = 0, \quad p \dots \frac{x-5}{5} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-0}{-1}.$$

**Zadatak 2.9** Naći jednačbu ravnine u kojoj leži pravac  $p \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$  i koja stoji okomito na ravninu  $\rho \dots 2x + 3y - z = 4$ .

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots - 8x + 5y - z + 11 = 0.$$

**Zadatak 2.10** Točke  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (3, 0, 3)$  i  $C = (-2, 1, 1)$  su vrhovi trokuta  $\triangle ABC$ . Naći:  
**a)** jednačbu simetrale (unutarnjeg) kuta pri vrhu  $A$ ;  
**b)** jednačbu ravnine koja prolazi kroz točku  $B$  i stoji okomito na simetralu kuta pri vrhu  $A$ .

**Rješenje.**

**a)** Označimo sa  $s_\alpha$  pravac koji sadrži simetralu (unutarnjeg) kuta pri vrhu  $A$ . Za vektor smjera ovog pravca očito vrijedi:

$$\vec{s}_\alpha = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}.$$

Kako je zadano  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (3, 0, 3)$  i  $C = (-2, 1, 1)$ , to je:

$$\vec{AB} = (2, -1, 2), \quad |\vec{AB}| = 3 \quad \text{i} \quad \vec{AC} = (-3, 0, 0), \quad |\vec{AC}| = 3,$$

odnosno

$$\vec{s}_\alpha = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Sada je:

$$s_\alpha \dots \frac{x-1}{-1/3} = \frac{y-1}{-1/3} = \frac{z-1}{2/3}.$$

**b)** Budući da tražena ravnina stoji okomito na  $s_\alpha$ , za njezin vektor normale zapravo vrijedi  $\vec{n}_\pi = \vec{s}_\alpha = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ .

Konačno, budući će tražena ravnina prolaziti točkom  $B = (3, 0, 3)$  bit će:

$$\pi \dots -\frac{1}{3}(x-3) - \frac{1}{3}(y-0) + \frac{2}{3}(z-3) = 0,$$

odnosno

$$\pi \dots x + y - 2z + 3 = 0.$$

**Zadatak 2.11** Zadane su točke  $A = (0, 3, 4)$ ,  $B = (-1, 2, 3)$ ,  $C = (1, -2, -1)$  i  $D = (4, -1, 1)$ . Napisati jednadžbu ravnine koja sadrži točke  $A$  i  $B$  i paralelna je s vektorom  $\overrightarrow{CD}$ .

**Rješenje.**

Budući da tražena ravnina sadrži točke  $A$  i  $B$ , njezin vektor normale je okomit na vektor  $\overrightarrow{AB}$ , i budući je njezin vektor normale okomit na vektor  $\overrightarrow{CD}$  vrijedi:

$$\begin{cases} \vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{CD} \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\pi \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{n}_\pi = \lambda (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}).$$

Kako je zadano  $A = (0, 3, 4)$ ,  $B = (-1, 2, 3)$ ,  $C = (1, -2, -1)$  i  $D = (4, -1, 1)$ , to je:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -1) \quad \text{i} \quad \overrightarrow{CD} = (3, 1, 2).$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2+1)\vec{i} + (-3+2)\vec{j} + (-1+3)\vec{k} \\ &= -\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \\ &= (-1, -1, 2), \end{aligned}$$

dakle vrijedi:

$$\vec{n}_\pi = \lambda (-1, -1, 2) = (-\lambda, -\lambda, 2\lambda),$$

gdje je  $\lambda$  neki realan broj,  $\lambda \neq 0$ . Konačno, budući su nam poznati barem jedna točka ravnine i njezin vektor normale, dovoljno je u **opći skalarni oblik** jednadžbe ravnine (2.14) uvrstiti

$$x_1 = -1, \quad y_1 = 2, \quad z_1 = 3 \quad \text{i} \quad A = -\lambda, \quad B = -\lambda, \quad C = 2\lambda,$$

pa ćemo imati

$$\pi \dots -\lambda(x+1) - \lambda(y-2) + 2\lambda(z-3) = 0,$$

odnosno jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots x + y - 2z + 5 = 0.$$

### Zadatak 2.12

**a)** Napisati jednadžbu ravnine  $\pi$  koja prolazi točkama  $A = (4, 5, 2)$  i  $B = (6, 2, 4)$ , a paralelna je vektoru  $\vec{a} = (1, 2, 1)$ ;

**b)** Naći prodor pravca  $p \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$  i ravnine  $\pi$ ;

**c)** Pod kojim kutom pravac  $p$  prodire ravninu  $\pi$ ?

**Rješenje.**

**a)**  $\pi \dots x - z - 2 = 0;$

**b)**  $P = (2, 1, 0);$

**c)**  $\theta = \frac{\pi}{2} \text{ rad.}$

**Zadatak 2.13** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točke  $A = (1, 0, 4)$  i  $B = (-2, 1, 5)$ , a paralelna je s pravcem koji prolazi kroz točke  $P = (1, -2, 1)$  i  $Q = (2, 1, 3)$ .

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots x - 7y + 10z - 41 = 0.$$

**Zadatak 2.14** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (1, 2, -4)$ , a podjednako je nagnuta prema koordinatnim osima.

**Rješenje.**

Postoje četiri ravnine kroz  $T = (1, 2, -4)$  podjednako nagnute prema koordinatnim osima. Jedna takva ravnina je:

$$\pi \dots x + y + z + 1 = 0.$$

**Zadatak 2.15** Pravac  $p$  prolazi točkom  $P = (1, -1, 1)$ , a s koordinatnim osima gradi jednake kutove. Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz pravac  $p$  i točku  $Q = (2, 1, 3)$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$p \dots \frac{x-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{y+1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{z-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \text{i} \quad \pi \dots y - z + 2 = 0.$$

**Zadatak 2.16** Pravac  $p$  prolazi kroz točku  $P = (1, -2, 0)$  i ima vektor smjera, čije su koordinate u omjeru  $1 : 2 : 3$ . Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $Q = (2, 1, 4)$  i pravac  $p$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$p \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{i} \quad \pi \dots x + y - z + 1 = 0.$$

**Zadatak 2.17** Naći jednadžbu ravnine koja je okomita na pravac koji spaja koordinatni početak  $O = (0, 0, 0)$  s točkom  $T = (2, -2, 1)$ , a udaljena je za 6 dužnih jedinica od točke  $O$ .

**Rješenje.**

Postoje dvije ravnine koje zadovoljavaju zadane uvjete:

$$\pi \dots 2x - 2y + z \pm 18 = 0.$$

**Zadatak 2.18** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi točkom  $T = (-1, -3, 8)$  i na koordinatnim osima odsijeca jednake odsječke  $a \neq 0$ .

**Rješenje.**

Prema (2.15), **segmentni oblik** jednadžbe ravnine, a koja na koordinatnim osima odsijeca jednake odsječke  $a \neq 0$ , glasi:

$$\pi \dots \frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1.$$

Budući da tražena ravnina prolazi točkom  $T = (-1, -3, 8)$ , to njezine koordinate zadovoljavaju jednažbu te ravnine, dakle vrijedi:

$$\frac{-1}{a} + \frac{-3}{a} + \frac{8}{a} = 1,$$

odakle se lako dobiva da je  $a = 4$ . Stoga, jednažba tražene ravnine je:

$$\pi \dots x + y + z - 4 = 0.$$

**Zadatak 2.19** Naći jednažbu ravnine koja na osima apscisa i aplikata redom gradi odsječke  $a = 3$  i  $c = -2$ , a paralelna je s osi ordinata.

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots 2x - 3z - 6 = 0.$$

**Zadatak 2.20** Naći jednažbu ravnine koja prolazi kroz točke  $A = (-1, 2, 5)$  i  $B = (3, -1, 4)$ , a paralelna je s osi aplikata.

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots 3x + 4y - 5 = 0.$$

**Zadatak 2.21** Naći jednažbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (2, -1, 3)$  i os aplikata.

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots x + 2y = 0.$$

**Zadatak 2.22** Naći jednažbu ravnine koja na osima apscisa i ordinata gradi jednake odsječke, a na osi aplikata dva puta veći odsječak, i koja prolazi kroz točku  $T = (1, -1, 1)$ .

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots 2x + 2y + z - 1 = 0.$$

**Zadatak 2.23** Naći odsječke što ih na koordinatnim osima pravi ravnina  $\pi \dots 6x + 4y - 3z - 12 = 0$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -4.$$

**Zadatak 2.24** U ravnini  $\pi \dots 2x + 3y - z + 4 = 0$  leži točka  $T$ . Projekcija točke  $T$  na ravninu  $xOy$  je točka  $T' = (1, -1, 0)$ . Koje su koordinate točke  $T$ ?

**Rješenje.**

Tražena točka je:

$$T = (1, -1, 3).$$

**Zadatak 2.25** Odrediti vrijednost parametra  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da vektor  $\vec{a} = (1, -2, \lambda)$  bude paralelan s ravninom  $\pi \dots 2x + 3y + z - 4 = 0$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\lambda = 4.$$

**Zadatak 2.26** Kroz točke  $A = (-1, 1, -1)$  i  $B = (1, 2, 1)$  povučen je pravac  $p$ , a kroz točke  $C = (-1, 2, -2)$  i  $D = (0, 4, 1)$  pravac  $q$ . Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (3, -2, 0)$  a paralelna je s pravcima  $p$  i  $q$ .

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots x + 4y - 3z + 5 = 0.$$

**Zadatak 2.27** Napisati jednadžbu ravnine koja je paralelna s vektorima  $\vec{AC}$  i  $\vec{BD}$  i prolazi kroz točku  $T = (0, 1, 0)$ , ako su  $A = (-3, -2, -2)$ ,  $C = (0, 0, 2)$ ,  $B = (-3, 1, 0)$  i  $D = (1, 2, 2)$ .

**Rješenje.**

Tražena ravnina je:

$$\pi \dots 2y - z - 2 = 0.$$

**Zadatak 2.28** Napisati jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (2, 0, -1)$  a okomita je na dvije ravnine  $\pi \dots 2x - y - 3 = 0$  i  $\rho \dots x + y - z + 1 = 0$ .

**Rješenje.**

Prvo ispitajmo (ne)pripadnost zadane točke  $T = (2, 0, -1)$  ravninama  $\pi$  odnosno  $\rho$ . U tu svrhu dovoljno je uvrstiti koordinate zadane točke u jednadžbe tih ravnina. Vrijedi:

$$\begin{array}{ll} 2 \cdot 2 - 0 - 3 = 0 & 2 + 0 - (-1) + 1 = 0 \\ 1 = 0 & 4 = 0 \end{array}$$

što je **kontradikcija** u oba slučaja, pa možemo zaključiti kako:

$$T \notin \pi \quad \text{i} \quad T \notin \rho.$$

Nadalje, budući je tražena ravnina okomita i na ravninu  $\pi$  i na ravninu  $\rho$  vrijedi:

$$\begin{cases} \vec{n}_\tau \perp \vec{n}_\pi \\ \vec{n}_\tau \perp \vec{n}_\rho \end{cases} \Rightarrow \vec{n}_\tau \parallel \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\rho \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{n}_\tau = \lambda (\vec{n}_\pi \times \vec{n}_\rho).$$

Kako je

$$\vec{n}_\pi = (2, -1, 0) \quad \text{i} \quad \vec{n}_\rho = (1, 1, -1).$$

to je:

$$\begin{aligned} \vec{n}_\pi \times \vec{n}_\rho &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + (0+2)\vec{j} + (2+1)\vec{k} \\ &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ &= (1, 2, 3), \end{aligned}$$

dakle vrijedi:

$$\vec{n}_\tau = \lambda(1, 2, 3) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda),$$

gdje je  $\lambda$  neki realan broj,  $\lambda \neq 0$ . Konačno, budući su nam poznati barem jedna točka ravnine i njezin vektor normale, dovoljno je u **opći skalarni oblik** jednadžbe ravnine (2.14) uvrstiti

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -1 \quad \text{i} \quad A = \lambda, \quad B = 2\lambda, \quad C = 3\lambda,$$

pa ćemo imati

$$\tau \dots \lambda(x-2) + 2\lambda(y-0) + 3\lambda(z+1) = 0,$$

odnosno jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\tau \dots x + 2y + 3z + 1 = 0.$$

**Zadatak 2.29** Napisati jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (1, -1, 2)$  a okomita je na dvije ravnine  $\pi \dots x - 2z + 3 = 0$  i  $\rho \dots 2x + y - z = 0$ .

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\tau \dots 2x - 3y + z - 7 = 0.$$

**Zadatak 2.30** Naći zajedničku točku tri zadane ravnine:

$$\pi \dots x - 2y + z - 5 = 0, \quad \rho \dots 2x + y - z + 1 = 0, \quad \tau \dots 3x + 4y + 2z - 3 = 0.$$

**Rješenje.**

Zajednička točka je (**jedinstveno** rješenje):

$$T = (1, -1, 2).$$

**Zadatak 2.31** Odrediti  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $\mu \in \mathbb{R}$  tako da ravnine  $\pi \dots 6x + 4y + 2\lambda z - 1 = 0$  i  $\rho \dots 3x - 2\mu y + z + 5 = 0$  budu paralelne.

**Rješenje.**

Zadane ravnine bit će paralelne ako vrijedi:

$$\lambda = 1, \quad \mu = -1.$$

**Zadatak 2.32** Odrediti realni parametar  $\lambda$  tako da ravnine  $\pi \dots 2x - 3y + \lambda z + 1 = 0$  i  $\rho \dots 5x + 2y + z - 3 = 0$  budu okomite.

**Rješenje.**

Zadane ravnine bit će okomite za  $\lambda = -4$ . ■

**Zadatak 2.33** Naći jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu  $\rho \dots x - 2y + 3z + 1 = 0$  i siječe je po pravcu koji leži u koordinatnoj ravnini  $xOy$ .

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots 3x - 6y - 5z + 3 = 0.$$

**Zadatak 2.34** Pravac  $p$  prolazi kroz točke  $A = (2, 1, 3)$  i  $C = (-1, 2, 1)$ , a pravac  $q$  prolazi kroz točke  $B = (2, -1, 1)$  i  $D = (1, 1, -1)$ . Naći jednadžbu ravnine koja je podjednako udaljena od pravaca  $p$  i  $q$ . ■

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:  $\pi \dots 2x - 4y - 5z + 6 = 0$ . ■

**Zadatak 2.35** Pokazati da ravnine  $\pi \dots 2x - 3y + z + 3 = 0$ ,  $\rho \dots x - 8y - 2z - 1 = 0$  i  $\tau \dots 3x + 2y + 4z + 2 = 0$  čine bočne strane (pobočke) jedne trostrane prizme. ■

**Zadatak 2.36** Pokazati da ravnine  $\pi \dots 2x - y + 2z - 1 = 0$ ,  $\rho \dots 3x + y - z + 3 = 0$  i  $\tau \dots 4x + 3y - 4z + 7 = 0$  prolaze kroz jedan pravac. ■

**Zadatak 2.37** Zadane su točke  $A = (1, 1, -1)$ ,  $B = (1, 2, 0)$  i  $C = (-1, 0, 0)$ . Napisati jednadžbu ravnine koja je okomita na ravninu  $\rho \dots 2x - y + 5z - 3 = 0$ , koja je paralelna s vektorom  $\overrightarrow{AB}$ , i sadrži točku  $C$ . ■

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots 3x + y - z + 3 = 0.$$

**Zadatak 2.38** Zadani su točka  $T = (1, 3, 5)$  i pravac  $p \dots \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$ . ■

- Naći udaljenost točke  $T$  od pravca  $p$ ;
- Naći jednadžbu ravnine  $\pi$  u kojoj leže točka  $T$  i pravac  $p$ .

**Rješenje.**

a) Prvo određujemo jednadžbu pravca  $p$  u **kanonskom** obliku, a zatim određujemo jednadžbu ravnine  $\rho$  koja prolazi točkom  $T$  i okomita je na pravac  $p$ . Budući je pravac  $p$  zadan kao **presječnica**

dviju ravnina, za njegov vektor smjera vrijedi:

$$\vec{s}_p = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}.$$

Nadalje, nije teško zaključiti kako točka  $P = (2, -3, 0)$  leži na pravcu  $p$ , pa će jednačba tog pravca u [kanonskom](#) obliku biti:

$$p \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Dodatno, budući je vektor normale  $\vec{n}_\rho$  ravnine  $\rho$  jednak vektoru smjera  $\vec{s}_p = (1, -1, -1)$  pravca  $p$ , prema (2.13) [skalarna](#) jednačba ravnine  $\rho$  je:

$$\rho \dots 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-3) - 1 \cdot (z-5) = 0,$$

odnosno vrijedi:

$$\rho \dots x - y - z + 7 = 0.$$

Sada određujemo sjecište (probodište) pravca  $p$  i ravnine  $\rho$ . Uvrštavanjem parametarske jednačbe

$$\text{pravca } p \dots \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t - 3, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -t \end{cases} \text{ u opći oblik jednačbe ravnine } \rho \text{ dobivamo:}$$

$$t + 2 + t + 3 + t + 7 = 0,$$

odnosno

$$t = -4,$$

pa sjecište  $\{S\} = p \cap \rho$  ima koordinate

$$x = -4 + 2 = -2, \quad y = 4 - 3 = 1, \quad z = 4.$$

Na koncu, budući je točka  $S$  ortogonalna projekcija točke  $T$  na pravac  $p$ , tražena udaljenost iznosi:

$$d(T, p) = d(T, S) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - 1)^2 + (5 - 4)^2} = \boxed{\sqrt{14}};$$

**b)** Budući su nam poznate točka  $T = (1, 3, 5)$ , kao i dvije točke pravca  $p$ ,  $P = (2, -3, 0)$ ,  $S = (-2, 1, 4) \in p$ , tražena jednačba ravnine može se napisati (u skalarnom obliku) kao jednačba ravnine kroz tri točke:

$$\pi \dots \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-5 \\ 2-1 & -3-3 & 0-5 \\ -2-1 & 1-3 & 4-5 \end{vmatrix} = 0,$$

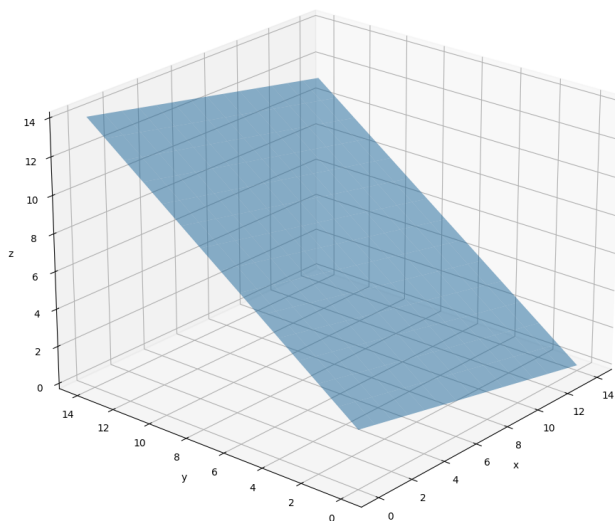
odnosno

$$\pi \dots -4x + 16y - 20z + 56 = 0,$$

i konačno

$$\boxed{\pi \dots x - 4y + 5z - 14 = 0}.$$

Vizualizacija tražene ravnine  $\pi$  (stvorena s pomoću skriptnog programskog jezika opće namjene – [Python](#)) prikazana je na Slici 2.5. (Inače, za vizualizaciju inih matematičkih koncepata, svakom čitatelju preporučujemo [besplatan, multi-platformski](#) digitalni alat [GeoGebra](#).)



**Slika 2.5:** Ravnina  $\pi \dots x - 4y + 5z - 14 = 0$ .

**Zadatak 2.39** Zadani su točka  $T = (1, -1, -2)$  i pravac  $p \dots x = 3t - 3, y = 2t - 2, z = -t + 8, t \in \mathbb{R}$ . Naći:

- udaljenost točke  $T$  od pravca  $p$ ;
- jednadžbu ravnine  $\pi$  u kojoj leže točka  $T$  i pravac  $p$ .

**Rješenje.**

- $d(T, p) = 3\sqrt{\frac{59}{7}}$ ;
- $\pi \dots -19x + 26y - 5z + 35 = 0$ .

**Zadatak 2.40** Naći udaljenost između ravnine  $\pi \dots x - 2y + z - 1 = 0$  i ravnine  $\rho \dots 2x - 4y + 2z + 1 = 0$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $d(\pi, \rho) = \sqrt{\frac{3}{8}}$ .

**Zadatak 2.41**

- Kroz točku  $T = (-1, 1, -2)$  postaviti ravninu  $\pi$  paralelnu ravnini  $\rho$  koja sadrži točke  $A = (1, -1, 1), B = (-2, 1, 3)$  i  $C = (4, -5, -2)$ ;
- Odrediti udaljenost tih dviju ravnina.

**Rješenje.**

- $\pi \dots 2x - 3y + 6z + 17 = 0$  i  $\rho \dots 2x - 3y + 6z - 11 = 0$ ;
- $d(\pi, \rho) = 4$ .

**Zadatak 2.42** Naći jednadžbu pravca koji prolazi točkom  $T = (-1, 2, 1)$ , a paralelan je s vektorom  $\vec{v} = (2, -3, 1)$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$ .

**Zadatak 2.43** Naći jednadžbu pravca koji prolazi točkom  $T = (2, 0, -3)$ , a paralelan je s pravcem koji spaja koordinatni početak s točkom  $P = (1, 4, 2)$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{2}$ .

**Zadatak 2.44** Kroz točke  $A = (1, -2, 2)$  i  $B = (2, 1, 4)$  povučen je pravac  $p$ . Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $T = (2, -1, 3)$ , a paralelan je s pravcem  $p$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$ .

**Zadatak 2.45** Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $T = (-1, 1, -1)$  i okomit je na ravninu  $\pi \dots 2x - 3y + z - 4 = 0$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{1}$ .

**Zadatak 2.46** Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točke  $A = (2, 1, 3)$  i  $B = (4, 0, 5)$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ .

**Zadatak 2.47** Naći jednadžbu pravca koji

a) prolazi kroz točku  $A = (-2, 4, 3)$  a paralelan je s pravcem  $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{-1}$ ;

b) sadrži točku  $B = (-4, 3, 0)$  a paralelan je s pravcem  $q \dots \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ ;

c) prolazi kroz točku  $C = (3, -1, 2)$  a paralelan je s pravcem  $r \dots \begin{cases} 2x - 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$ .

**Rješenje.**

a)  $a \dots \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ ;

b)  $b \dots \frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}$ ;

c)  $c \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{7}$ .

**Zadatak 2.48** Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $T = (-2, 3, -1)$  a paralelan je s osi ordinata.

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \begin{cases} x+2=0 \\ z+1=0 \end{cases}$ .

**Zadatak 2.49** Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $T = (3, 1, -4)$  a s koordinatnim osima redom gradi kutove  $60^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{2}} = \frac{z+4}{1}$ .

**Zadatak 2.50** Naći kut između pravaca:

$$p_1 \dots x-3 = \frac{y+4}{-2} = z \quad \text{i} \quad p_2 \dots x+5 = y+3 = \frac{z+1}{-2}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\varphi = \angle(p_1, p_2) = \frac{\pi}{3}$  rad.

**Zadatak 2.51** Naći kosinuse priklonih kutova<sup>30</sup> vektora smjera pravca  $p$ , ako je:

$$p \dots \begin{cases} 5x+7y+4z-3=0 \\ 2x+3y+2z+5=0 \end{cases}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\cos \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \beta = \frac{-2}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{3}$ .

**Zadatak 2.52** Naći kut između pravaca:

$$p_1 \dots \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \begin{cases} 4x+5y+6z-7=0 \\ 3x+2y+z+3=0 \end{cases}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\varphi = \angle(p_1, p_2) = \frac{\pi}{3}$ .

**Zadatak 2.53** Naći kut između pravaca:

$$p_1 \dots \begin{cases} 2x-2y-z-8=0 \\ x+2y-2z-4=0 \end{cases} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \begin{cases} 4x+y+3z-4=0 \\ 2x+2y-3z-11=0 \end{cases}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\cos \varphi = \cos \angle(p_1, p_2) = \frac{4}{21} \Rightarrow \varphi \approx 79,02^\circ$ .

<sup>30</sup> Prikloni kutovi vektora  $\vec{a}$  iz  $\mathbb{V}^3$  su kutovi koje taj vektor zatvara s vektorima  $\vec{i}, \vec{j}$  i  $\vec{k}$ , a označavamo ih redom s  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$ . Dodatno, vrijedi:  $\vec{a}_0 = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ .

**Zadatak 2.54** Naći kut između pravca  $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}$  i ravnine  $\pi \dots 3x + y + 2z - 4 = 0$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\psi = \angle(p, \pi) = \frac{\pi}{6} \text{ rad.}$

**Zadatak 2.55** Naći kut između

- a) pravca  $p \dots \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$  i ravnine  $\pi \dots x - z + 1 = 0$ ;
- b) pravca  $p \dots \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$  i ravnine  $\rho \dots x - y + 1 = 0$ .

**Rješenje.**

a)  $\psi = \angle(p, \pi) = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$

b)  $\zeta = \angle(p, \rho) = 0 \text{ rad.}$

**Zadatak 2.56** Odrediti presječnu točku (sjecište) pravaca

$$p \dots \begin{cases} 5x - 2y + 5z + 3 = 0 \\ x + 3y - 4z - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad q \dots \begin{cases} 3x + 10y - z - 47 = 0 \\ 6x - 2y + 7z + 3 = 0 \end{cases}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $p \cap q = \{S\}$  i  $S = (2, 4, -1)$ .

**Zadatak 2.57** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz točku  $T = (1, 2, -4)$  a paralelna je s pravcima:

$$p \dots \begin{cases} 3x + 4y - 2z + 3 = 0 \\ 4x + 5y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad q \dots \begin{cases} 2x - 3y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + 2z + 3 = 0 \end{cases}.$$

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots x + y + z + 1 = 0.$$

**Zadatak 2.58** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi pravac  $p \dots \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ 3x + 4y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

i paralelna je s pravcem  $q \dots \begin{cases} 3x - 2y + 4z + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ .

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots x + y + z - 1 = 0.$$

**Zadatak 2.59** Naći jednadžbu ravnine koja prolazi kroz presjek ravnina  $\rho_1 \dots x - y + z + 1 = 0$  i  $\rho_2 \dots x + y - z + 1 = 0$  a okomita je na ravninu  $\tau \dots 2x - y + 5z - 3 = 0$ .

**Rješenje.**

Budući će tražena ravnina  $\pi$  prolaziti presjekom ravnina  $\rho_1$  i  $\rho_2$  (tzv. **osi sveska**), njezina jednadžba bit će dana s (kao jednadžba **pramena ravnina**):

$$\pi \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

za neki  $\lambda \in \mathbb{R}$ , i gdje su  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$  i  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$  vektori normala ravnina  $\rho_1$  i  $\rho_2$ . Dakle, vrijedi:

$$\pi \dots x - y + z + 1 + \lambda \cdot (x + y - z + 1) = 0,$$

odnosno

$$\pi \dots (1 + \lambda)x + (\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z + (1 + \lambda) = 0.$$

Iskoristimo sada uvjet okomitosti ravnina  $\pi$  i  $\tau$ , tj.

$$\begin{aligned} \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\tau &\Leftrightarrow \vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_\tau = 0 &\Leftrightarrow (1 + \lambda, \lambda - 1, 1 - \lambda) \cdot (2, -1, 5) = 0 \\ &&\Leftrightarrow 2 + 2\lambda - \lambda + 1 + 5 - 5\lambda = 0 \\ &&\Leftrightarrow -4\lambda + 8 = 0 \\ &&\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 2}. \end{aligned}$$

Konačno, jednadžba tražene ravnine je:

$$\boxed{\pi \dots 3x + y - z + 3 = 0}.$$

**Zadatak 2.60** Naći realne konstante  $\alpha$  i  $\beta$  takve da pravac  $p \dots \begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$  bude okomit na ravninu  $\pi \dots \alpha x + 8y + \beta z + 2 = 0$ . ■

**Rješenje.**

Vrijedi:  $p \perp \pi \Leftrightarrow \alpha = 5$  i  $\beta = 1$ .

**Zadatak 2.61** Naći ortogonalnu projekciju<sup>31</sup>  $p'$  pravca  $p \dots \frac{x-9}{-2} = \frac{y+7}{11} = \frac{z-4}{-10}$  na ravninu  $\pi \dots 2x + y - 2z - 3 = 0$ . ■

**Rješenje.**

Vrijedi:  $p' \dots \frac{x-1}{8} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z}{4}$ . ■

**Zadatak 2.62** Dužina s krajevima  $A = (2, 1, 3)$  i  $B = (4, 4, 6)$  projicirana je ortogonalno na pravac koji prolazi kroz točke  $P = (1, 2, 1)$  i  $Q = (2, -1, 2)$ . Odrediti duljinu te projekcije.

<sup>31</sup> Ortogonalna projekcija pravca na ravninu je određena projekcijama dviju proizvoljnih točaka tog pravca. Jedna od tih točaka može biti i točka u kojoj pravac probada ravninu. Ortogonalna projekcija točke  $T$  na ravninu  $\pi$  je točka  $T'$  u kojoj normala iz točke  $T$  na ravninu  $\pi$  probada ravninu  $\pi$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $|\overrightarrow{A'B'}| = \frac{4\sqrt{11}}{11}$ .

**Zadatak 2.63** Zadane su točke  $A = (3, -2, 1)$  i  $B = (1, 4, 1)$ . Vektor  $\overrightarrow{AB}$  projiciran je ortogonalno na pravac  $p$  koji s koordinatnim osima gradi kutove od  $60^\circ$ ,  $60^\circ$  i  $45^\circ$ . Naći duljinu ove projekcije.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $|\overrightarrow{A'B'}| = 2$ .

**Zadatak 2.64** Na pravcu  $p \dots \frac{x-8}{8} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z}{0}$  naći točku čija udaljenost od točke  $T = (8, 2, 0)$  iznosi 10.

**Rješenje.**

Budući da na pravcu  $p$  tražimo točku  $P \in p$  za koju vrijedi  $d(T, P) = |\overrightarrow{TP}| = 10$ , prvo ćemo odrediti parametarsku jednadžbu pravca  $p$ :

$$p \dots \frac{x-8}{8} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z}{0} \quad (=t) \quad \Leftrightarrow \quad p \dots \begin{cases} x = 8t + 8 \\ y = 2 - 6t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$$

Sada, za pravokutne koordinate točke  $P \in p$  možemo pretpostaviti da postoji neki  $t \in \mathbb{R}$  takav da vrijedi  $x_P = 8t + 8$ ,  $y_P = 2 - 6t$ ,  $z_P = 0$ , pa ćemo imati:

$$\begin{aligned} d(T, P) = |\overrightarrow{TP}| = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2} = 10 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(8t)^2 + (-6t)^2 + (0)^2} = 10 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{100t^2} = 10 \\ &\Leftrightarrow 10|t| = 10 \\ &\Leftrightarrow |t| = 1 \\ &\Leftrightarrow t_1 = -1 \text{ i } t_2 = 1. \end{aligned}$$

Dakle, na pravcu  $p$  nalazimo čak dvije točke  $P_1 = (0, 8, 0)$  i  $P_2 = (16, -4, 0)$  koje su jednako udaljene od zadane točke  $T = (8, 2, 0)$ .

**Zadatak 2.65** Kroz točke  $A = (-1, 0, 1)$  i  $B = (1, 2, 3)$  povučen je pravac  $p$ . Naći na pravcu  $p$  onu točku koja je od točke  $T = (2, -1, 1)$  udaljena za 3 dužne jedinice.

**Rješenje.**

Na pravcu  $p$  postoje dvije točke  $P_1$  i  $P_2$  za koje je  $d(P_1, T) = 3 = d(P_2, T)$ . To su:

$$P_1 = (0, 1, 2) \quad \text{i} \quad P_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

**Zadatak 2.66** Na pravcu  $p \dots \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$ , odrediti točke  $A$  i  $B$  koje su od točke  $C = (1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  na udaljenosti  $\sqrt{2}$ . Zatim, odrediti površinu trokuta  $\triangle ABC$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$A = (0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), \quad B = (1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}), \quad P_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**Zadatak 2.67** Odrediti  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da pravac  $p \dots \begin{cases} 2x - 3y + \lambda z - 6 = 0 \\ x + 2y - z + 3 = 0 \end{cases}$  siječe os aplikata.

**Rješenje.**

Za  $\lambda = 2$  je  $p \cap Oz = \{S\}$  i  $S = (0, 0, 3)$ .

**Zadatak 2.68** Odrediti  $\lambda \in \mathbb{R}$  u jednadžbi pravca  $p \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{\lambda} = \frac{z+2}{1}$  da bi se sjekao s pravcem  $q \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$ , i u tom slučaju naći presječnu točku i kut između pravaca.

**Rješenje.**

Iz jednadžbi zadanih pravaca uočimo točke  $P = (3, 1, -2) \in p$  i  $Q = (1, 2, 1) \in q$ . Dovoljan uvjet da se pravci  $p$  i  $q$  sijeku (2.49) u biti je ekvivalentan s uvjetom da su vektori  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\vec{s}_p$  i  $\vec{s}_q$  komplanarni, tj. da vrijedi:

$$(\overrightarrow{PQ}, \vec{s}_p, \vec{s}_q) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_Q - x_P & y_Q - y_P & z_Q - z_P \\ l_p & m_p & n_p \\ l_q & m_q & n_q \end{vmatrix} = 0.$$

Nakon uvrštavanja koordinata imamo:

$$\begin{vmatrix} 1-3 & 2-1 & 1+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$4\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2}.$$

Dakle, za vrijednost  $\lambda = 2$  pravci  $p$  i  $q$  se sijeku.

Nadalje, za kut između pravaca  $p$  i  $q$  vrijedi:

$$\angle(p, q) = \angle(\vec{s}_p, \vec{s}_q),$$

pa ćemo imati (prema definiciji skalarnog produkta, odnosno formuli (1.5))

$$\cos \angle(\vec{s}_p, \vec{s}_q) = \frac{\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q}{|\vec{s}_p| |\vec{s}_q|} = \frac{2+2-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\vec{s}_p, \vec{s}_q) = \boxed{60^\circ}.$$

Konačno je (detalje prepuštamo čitatelju):  $p \cap q = \{S\}$  i  $S = (\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3})$ .

**Zadatak 2.69** Odrediti cjelobrojni parametar  $\lambda$ , tako da se pravci

$$p \dots \frac{x+4}{\lambda} = y-2 = z \quad \text{i} \quad q \dots x+3 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{\lambda}$$

sijeku. Za određenu vrijednost  $\lambda$  napisati jednadžbu ravnine kojoj pripadaju.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\lambda = -1$  i  $\pi \dots x + z + 4 = 0$ .

**Zadatak 2.70** Napisati jednadžbu ravnine koja je podjednako udaljena od pravaca

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{i} \quad q \dots \frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{4}.$$

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots 10x - 9y - 7z + 8 = 0.$$

**Zadatak 2.71** Zadani su pravci:

$$p \dots \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{i} \quad q \dots \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-5}.$$

Odrediti ravninu  $\pi$  koja se nalazi točno između pravaca  $p$  i  $q$ . Zatim, odrediti ravninu  $\rho$  paralelnu s  $\pi$ , takvu da je pravac  $p$  između  $\pi$  i  $\rho$  i da vrijedi:  $d(\rho, p) : d(\pi, p) = 2 : 1$ .

**Rješenje.**

Jednadžbe traženih ravnina glase:

$$\pi \dots -2x + y + z - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{i} \quad \rho \dots -2x + y + z + 1 = 0.$$

**Zadatak 2.72** Neka je pravac  $p'$  ortogonalna projekcija pravca  $p \dots \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t - 2, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t + 1 \end{cases}$  na ravninu  $\pi \dots 2x + 3y - z - 5 = 0$ . U ravnini  $\pi$  odredite pravac  $q$  okomit na  $p'$  koji siječe  $p$ .

**Rješenje.**

Od ranije nam je poznato kako je ortogonalna projekcija nekog pravca na ravninu određena projekcijama dviju proizvoljnih točaka tog pravca, te kako jedna od tih točaka može biti i točka u kojoj pravac probada ravninu. Stoga ćemo prvo naći probodište zadanog pravca  $p$  i zadane ravnine  $\pi$ . Uvrštavanjem parametarske jednadžbe pravca  $p$  u opći oblik jednadžbe  $\pi$  dobivamo:

$$2(2t + 3) + 3(-t - 2) - (3t + 1) - 5 = 0$$

odnosno

$$t = -3,$$

pa probodište  $\{S\} = p \cap \pi$  ima koordinate

$$x = 2(-3) + 3 = -3, \quad y = -(-3) - 2 = 1, \quad z = 3(-3) + 1 = -8.$$

Nadalje, neka je  $B$  proizvoljna točka pravca  $p$ , npr. neka je  $B = (11, -6, 13)$ . Njezina ortogonalna projekcija na ravninu  $\pi$  je točka  $B' = (13, -3, 12)$ . Sada, ortogonalnu projekciju  $p'$  možemo naći kao pravac koji prolazi kroz dvije točke ( $S$  i  $B'$ ). Vrijedi (detalje prepuštamo čitatelju):

$$p' \dots \begin{cases} x = 16t - 3 \\ y = -4t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 20t - 8 \end{cases}$$

Na koncu, ćemo u ravnini  $\pi$  odrediti pravac  $q$  okomit na projekciju  $p'$  i koji siječe pravac  $p$ . Za vektor smjera ovog pravca vrijedi:

$$\begin{cases} \vec{s}_q \perp \vec{s}_{p'} \\ \vec{s}_q \perp \vec{n}_\pi \end{cases} \Rightarrow \vec{s}_q \parallel \vec{n}_\pi \times \vec{s}_{p'} \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \vec{s}_q = \lambda (\vec{n}_\pi \times \vec{s}_{p'}).$$

Budući je  $p' \dots \frac{x+3}{16} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+8}{20}$  i  $\pi \dots 2x + 3y - z - 5 = 0$ , to je:

$$\vec{s}_{p'} = (16, -4, 20) \quad \text{i} \quad \vec{n}_\pi = (2, 3, -1).$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \vec{n}_\pi \times \vec{s}_{p'} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 16 & -4 & 20 \end{vmatrix} \\ &= 56\vec{i} - 56\vec{j} - 56\vec{k} \\ &= (56, -56, -56), \end{aligned}$$

dakle vrijedi:

$$\vec{s}_q = \lambda (56, -56, -56) = (56\lambda, -56\lambda, -56\lambda),$$

gdje je  $\lambda$  neki realan broj,  $\lambda \neq 0$ . Bez gubitka općenitosti smijemo uzeti  $\vec{s}_q = (1, -1, -1)$ , te povući pravac  $q$  kroz točku  $S$ . Stoga je:

$$q \dots \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t + 1, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t - 8 \end{cases}$$

**Zadatak 2.73** Odrediti sve vektore  $\vec{w}$  koji su paralelni s ravninama  $\pi \dots x + 2z - 3 = 0$  i  $\rho \dots x + 5y + 4z - 6 = 0$ , a s vektorima  $\vec{u} = (1, -1, 2)$  i  $\vec{v} = (3, -2, 1)$  razapinju paralelopiped volumena 35.

**Rješenje.**

Traženi vektori su:

$$\vec{w}_1 = (10, 2, -5) \quad \text{i} \quad \vec{w}_2 = (-10, -2, 5).$$

**Zadatak 2.74** Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $M = (0, 2, -5)$  i siječe pravce  $p \dots \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+4}{7}$  i  $q \dots \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+10}{2}$ .

**Rješenje.**

Budući da tražimo pravac  $m$  koji siječe druga dva pravca  $p$  i  $q$  potrebno je prvo odrediti parametarske jednadžbe svih tih pravaca. Za zadana dva pravca  $p$  i  $q$  vrijedi:

$$p \dots \begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = -t - 1, t \in \mathbb{R}, \\ z = 7t - 4 \end{cases} \quad q \dots \begin{cases} x = 2s - 4 \\ y = 4s + 2, s \in \mathbb{R}, \\ z = 2s - 10 \end{cases}$$

dok za traženi pravac  $m$  znamo samo da prolazi kroz točku  $M = (0, 2, -5)$ , pa vrijedi

$$m \dots \frac{x-0}{l} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+5}{n} (=r) \Leftrightarrow m \dots \begin{cases} x = lr \\ y = mr + 2, r \in \mathbb{R}. \\ z = nr - 5 \end{cases}$$

Sada, kada smo odredili parametarske jednadžbe sva tri pravca, presječnu točku pravaca  $m$  i  $p$  pokušajmo naći izjednačavanjem njihovih parametarskih jednadžbi, što će rezultirati sustavom od **tri** linearne jednadžbe s **pet** nepoznanica. Dakle, dobivamo sljedeći linearni sustav:

$$\begin{array}{rclcl} 5t & + & 1 & = & lr & & 5t & - & lr & = & -1 & (1) \\ -t & - & 1 & = & mr + 2 & \Leftrightarrow & -t & - & mr & = & 3 & (2) \\ 7t & - & 4 & = & nr - 5 & & 7t & - & nr & = & -1 & (3) \end{array}$$

Sređivanjem jednadžbi ovog linearnog sustava kao  $(1) + 5(2)$  i  $(3) + 7(2)$  dobivamo:

$$\begin{array}{rclcl} -lr & - & 5mr & = & 14 & \Leftrightarrow & (-l - 5m)r & = & 14 \\ -nr & - & 7mr & = & 20 & \Leftrightarrow & (-n - 7m)r & = & 20 \end{array} \Rightarrow r = \frac{14}{-l - 5m} = \frac{20}{-n - 7m}.$$

Posljednja jednakost je ekvivalentna s:

$$10l + m - 7n = 0. \quad (I)$$

Nadalje, presječnu točku pravaca  $m$  i  $q$  pokušajmo naći na sličan način, pa ćemo dobiti:

$$\begin{array}{rclcl} 2s & - & 4 & = & lr & & 2s & - & lr & = & 4 & (-) \\ 4s & + & 2 & = & mr + 2 & \Leftrightarrow & 4s & - & mr & = & 0 & (=) \\ 2s & - & 10 & = & nr - 5 & & 2s & - & nr & = & 5 & (\equiv) \end{array}$$

Sređivanjem jednadžbi ovog linearnog sustava kao  $2(-) - (=)$  i  $2(\equiv) - (=)$  dobivamo:

$$\begin{array}{rclcl} 2lr & - & mr & = & -8 & \Leftrightarrow & (2l - m)r & = & -8 \\ 2nr & - & mr & = & -10 & \Leftrightarrow & (2n - m)r & = & -10 \end{array} \Rightarrow r = \frac{-8}{2l - m} = \frac{-10}{2n - m}.$$

Posljednja jednakost je ekvivalentna s:

$$10l - m - 8n = 0. \quad (II)$$

Konačno, jednadžbe (I) i (II) čine linearni sustav od **dvije** jednadžbe s **tri** nepoznanice, a koji ima **beskonačno mnogo rješenja**

$$l = \frac{3}{4}\alpha, \quad m = -\frac{1}{2}\alpha, \quad n = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

pa za traženi pravac  $q$  vrijedi

$$q \dots \frac{x-0}{\frac{3}{4}\alpha} = \frac{y-2}{-\frac{1}{2}\alpha} = \frac{z+5}{\alpha},$$

odnosno (za  $\alpha = 4$ )

$$q \dots \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+5}{4}.$$

**Zadatak 2.75** Naći jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $T = (1, -1, 2)$  a pod pravim kutom siječe pravac  $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z - 7 = 0 \end{cases}$ .

**Zadatak 2.76** Napisati jednadžbu pravca koji prolazi kroz točku  $T = (3, -2, -4)$ , paralelan je ravnini  $\pi \dots 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ , i siječe pravac  $p \dots \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+3}{1}$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $p \dots \frac{x-3}{-37} = \frac{y+2}{-117} = \frac{z+4}{41}$ .

**Zadatak 2.77** Kroz točku  $T = (1, -2, 1)$  povučen je pravac  $p$  koji siječe pravce:

$$q_1 \dots \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{2} \quad \text{i} \quad q_2 \dots \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

Naći jednadžbu pravca  $p$  i koordinate točaka  $S_1$  i  $S_2$  u kojima pravac  $p$  siječe zadane pravce  $q_1$  i  $q_2$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $p \dots \begin{cases} x - 2y + z - 6 = 0 \\ 4x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}, \quad S_1 = (1, -4, -3), \quad S_2 = (1, -\frac{5}{3}, \frac{5}{3}).$

**Zadatak 2.78**

- a) Naći prodor pravca  $p \dots \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-2}$  kroz ravninu  $\pi \dots 3x + 2y - z + 4 = 0$ ;
- b) Naći prodor pravca  $q \dots \begin{cases} x - y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$  kroz ravninu  $\rho \dots x + 2y - 3z + 4 = 0$ .

**Rješenje.**

a)  $P = (1, -2, 3)$ ;

b)  $P = (1, -1, 1)$ .

**Zadatak 2.79** Kroz koordinatni početak povučen je pravac  $p$  paralelno s vektorom  $\vec{u} = (1, -2, 3)$ . Pravac  $p$  probada ravninu  $\pi \dots x + y + z - 4 = 0$  u točki  $P$ . Izračunati duljinu dužine  $\overline{OP}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $|\overline{OP}| = 2\sqrt{14}$ .

**Zadatak 2.80** Pravac povučen iz koordinatnog početka normalno na ravninu koja prolazi kroz točke  $A = (2, 0, 4)$ ,  $B = (3, 1, 3)$  i  $C = (-1, -5, -1)$  prodire kroz ovu ravninu u točki  $P$ . Naći koordinate točke  $P$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $P = \left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

**Zadatak 2.81**

- a) Naći projekciju točke  $P = (4, 3, 1)$  na pravac  $p \dots \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{1}$ ;
- b) Naći projekciju točke  $Q = (3, 2, 0)$  na pravac  $q \dots \begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ y + 3z - 4 = 0 \end{cases}$ .

**Rješenje.**

- a)  $P' = (1, 1, 1)$ ;
- b)  $Q' = (1, 1, 1)$ .

**Zadatak 2.82** Neka je zadana točka  $A = (1, 2, 3)$  i pravac  $p \dots \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ . Na pravcu  $p$  odrediti ortogonalnu projekciju  $B$  točke  $A$ , kao i točku  $C$  tako da je trokut  $\triangle ABC$  pravokutno-jednakokrani.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $B = (2, 2, 2)$ ,  $C = \left(\frac{6 \pm \sqrt{6}}{3}, \frac{6 \pm \sqrt{6}}{3}, \frac{6 \pm \sqrt{6}}{3}\right)$ .

**Zadatak 2.83**

- a) Naći projekciju točke  $T = (2, -1, 3)$  na pravac  $p \dots \begin{cases} x = 3t \\ y = 5t - 7, t \in \mathbb{R}; \\ z = 2t + 2 \end{cases}$
- b) Naći udaljenost točke  $T$  od pravca  $p$ .

**Rješenje.**

- a)  $T' = (3, -2, 4)$ ;
- b)  $\delta = d(T, p) = \sqrt{3}$ .

**Zadatak 2.84** Zadani su točka  $T = (1, 2, 8)$  i pravac  $p \dots \begin{cases} x - 2z - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ . Odrediti:

- a) projekciju točke  $T$  na pravac  $p$ ;
- b) jednadžbu ravnine  $\pi$  u kojoj leže točka  $T$  i pravac  $p$ ;
- c) udaljenost točke  $T$  od pravca  $p$ .

**Rješenje.**

- a)  $T' = (3, -1, 1)$ ;
- b)  $\pi \dots -5x - 8y + 2z + 5 = 0$ ;
- c)  $\delta = d(T, p) = \sqrt{62}$ .

**Zadatak 2.85** Naći točku  $P$  na pravcu  $p \dots \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-1}$  koja je podjednako udaljena od točaka  $A = (1, -2, 3)$  i  $B = (3, 4, 1)$ .

**Rješenje.**

Tražena točka je:  $T = (-1, 2, 2)$ . ■

**Zadatak 2.86** U ravnini  $\pi \dots 3x - 2y + z + 2 = 0$  odrediti točku koja je podjednako udaljena od točaka  $A = (3, 2, 0)$ ,  $B = (1, 2, 0)$  i  $C = (0, 0, -3)$ .

**Rješenje.**

Tražena točka je:  $T = (2, \frac{5}{2}, -3)$ . ■

**Zadatak 2.87** Zadane su ravnine:

$$2x - y + z = -1$$

$$x + ay - z = 1$$

$$2x - y - z = 1.$$

Odredite vrijednost parametra  $a \in \mathbb{R}$  za koju je presjek zadanih ravnina **pravac** i odredite jednadžbu

tog pravca. Zatim, odredite udaljenost tog pravca od pravca  $q \dots \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi: Za  $a = -\frac{1}{2}$  je presjek zadanih ravnina **pravac**  $p \dots \begin{cases} x = \frac{1}{10} + 2t, \\ y = \frac{2}{10} + 4t, \\ z = -1 \end{cases} t \in \mathbb{R}$ . Udaljenost tog

pravca od pravca  $q$  je  $d(p, q) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ . ■

**Zadatak 2.88** Zadani su ravnina  $\pi \dots 2x - y - z = 3$  i pravac  $p \dots (x, y, z) = (2 - t, 4, 1 + 2t)$ .

a) Odrediti implicitnu jednadžbu ravnine  $\rho$  koja sadrži točku  $T = (3, -1, 5)$ , a okomita je na ravninu  $\pi$  i paralelna s pravcem  $p$ ;

b) Odredite kut između pravca  $p$  i njegove ortogonalne projekcije na ravninu  $\pi$ .

**Rješenje.**

a) Implicitna jednadžba tražene ravnine glasi:  $\rho \dots -2x - 3y - z + 8 = 0$ ;

b)  $\varphi = \angle(p, p') = \angle(p, \pi) \approx 46^\circ 54' 41''$ . ■

**Zadatak 2.89** Odrediti točku  $T''$  koja je simetrična točki  $T = (1, 9, 1)$  u odnosu na ravninu  $\pi \dots 2x + y + 3z = 0$ .

**Rješenje.**

Budući će točka simetrična točki  $T = (1, 9, 1)$  s obzirom na zadanu ravninu ležati na pravcu koji prolazi točkom  $T$  a koji stoji okomito na zadanu ravninu, prvo ćemo odrediti jednadžbu tog pravca.

Nije teško zaključiti da vrijedi:

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z-1}{3},$$

odnosno (u parametarskom obliku)

$$p \dots \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t + 9, \\ z = 3t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Njihovim uvrštavanjem u opći oblik jednadžbe ravnine  $\pi$  dobivamo sjecište (probodište) okomitog pravca  $p$  i ravnine  $\pi$  (što je ujedno i ortogonalna projekcija svake točke tog pravca, pa i točke  $T$ , na ravninu  $\pi$ ). Dakle, dobivamo:

$$4t + 2 + t + 9 + 9t + 3 = 0,$$

odnosno

$$t = -1,$$

pa sjecište  $\{S\} = p \cap \pi$  ima koordinate  $x = -1, y = 8, z = -2$ , tj. vrijedi  $S = (-1, 8, -2)$ .

Konačno, budući je  $S$  polovište dužine  $\overline{TT''}$ , za koordinate tražene točke  $T''$  vrijedi:

$$T'' = (2x_S - x_T, 2y_S - y_T, 2z_S - z_T) \Rightarrow T'' = (-3, 7, -5).$$

### Zadatak 2.90

- a) Naći točku  $B$  koja je simetrična (zrcalna) točki  $A = (1, 3, -4)$  s obzirom na ravninu  $\pi \dots 3x + y - 2z = 0$ ;  
 b) Napisati jednadžbu ravnine  $\rho$  koja prolazi točkama  $A, B$  i  $C = (2, 3, 6)$ .

#### Rješenje.

- a)  $B = (-5, 1, 0)$ ;  
 b)  $\rho \dots 10x - 32y - z + 82 = 0$ .

### Zadatak 2.91

- a) Naći koordinate točke  $T''$  koja je simetrična točki  $T = (0, 1, 1)$  u odnosu na pravac:

$$p \dots \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{2};$$

- b) Naći točku  $T''$  simetričnu točki  $T = (3, 1, -1)$  u odnosu na pravac:

$$q \dots \begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases}.$$

#### Rješenje.

- a)  $T'' = (1, 2, 1)$ ;  
 b)  $T'' = (1, 3, 7)$ .

**Zadatak 2.92** Naći jednadžbu ravnine koja sadrži pravac  $p \dots \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$ , točku  $A = (1, 1, 0)$  i točku  $A''$  simetričnu točki  $A$  u odnosu na pravac  $p$ .

**Rješenje.**

Budući će točka simetrična točki  $A = (1, 1, 0)$  s obzirom na zadani pravac  $p$  ležati na pravcu  $q$  koji prolazi točkom  $A$  a stoji okomito na zadani pravac  $p$ , prvo ćemo odrediti jednadžbu tog pravca  $q$ . U tu svrhu najprije napišimo jednadžbu pravca  $p$  u parametarskom obliku:

$$p \dots \begin{cases} x = -t - 1, \\ y = -2t + 2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = t \end{cases}$$

jer je sada jasno kako će za točku  $\{S\} = p \cap q$  postojati neki  $t \in \mathbb{R}$  takav da vrijedi

$$S = (-t - 1, -2t + 2, t).$$

Sada, možemo kreirati vektor  $\overrightarrow{AS} = (-t - 2, -2t + 1, t)$  koji je očigledno okomit na zadani pravac  $p$ , pa će vrijediti  $\vec{s}_p \cdot \overrightarrow{AS} = 0$ , odnosno:

$$(-1, -2, 1) \cdot (-t - 2, -2t + 1, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t + 2 + 4t - 2 + t = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 0},$$

što nam daje točku  $S = (-1, 2, 0)$ . Jednadžbu pravca  $q$  sada možemo napisati kao jednadžbu pravca kroz dvije točke ( $A$  i  $S$ ). Vrijedi (detalje prepuštamo čitatelju):

$$q \dots \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{s}_q = (-2, 1, 0)}.$$

Konačno, jednadžbu tražene ravnine  $\pi$  dobit ćemo kao jednadžbu ravnine koja sadrži pravce  $p$  i  $q$ , dakle **bez** potrebe određivanja koordinata zrcalne točke  $A''$ , tj. vrijedit će:

$$\begin{cases} \vec{n}_\pi \perp \vec{s}_p \\ \vec{n}_\pi \perp \vec{s}_q \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_\pi \parallel \vec{s}_p \times \vec{s}_q \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \vec{n}_\pi = \lambda (\vec{s}_p \times \vec{s}_q).$$

Kako imamo  $\vec{s}_p = (-1, -2, 1)$  i  $\vec{s}_q = (-2, 1, 0)$ , to je:

$$\vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \dots = -\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} = (-1, -2, -5),$$

pa vrijedi:

$$\vec{n}_\pi = \lambda (-1, -2, -5) = (-\lambda, -2\lambda, -5\lambda),$$

gdje je  $\lambda$  neki realan broj,  $\lambda \neq 0$ .

**Bez gubitka općenitosti** smijemo uzeti  $\vec{n}_\pi = (1, 2, 5)$ , što uz poznavanje barem jedne točke tražene ravnine, na primjer točka  $A \in \pi$ , daje:

$$\boxed{\pi \dots x + 2y + 5z - 3 = 0}.$$

**Zadatak 2.93** Pokazati da pravac  $p \dots \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$  leži u ravnini  $\pi \dots x - 2y + z - 3 = 0$ .

**Zadatak 2.94** Ispitati uzajamni (međusobni) položaj pravca  $p \dots \begin{cases} 3x - 2y + 4z + 5 = 0 \\ 4x - y + 5z - 7 = 0 \end{cases}$  i ravnine  $\pi \dots x + y + z + 1 = 0$ .

**Rješenje.**

Pravac  $p$  je  $\parallel$  s zadanom ravinom  $\pi$  i **NE** leži u njoj.

**Zadatak 2.95** Ispitati uzajamni (međusobni) položaj pravca  $p \dots \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 2x - 4y - z - 5 = 0 \end{cases}$  i ravnine  $\pi \dots x - y - 3 = 0$ .

**Rješenje.**

Pravac  $p$  je  $\parallel$  s zadanom ravinom  $\pi$  i **leži** u njoj.

**Zadatak 2.96** Dokazati da su  $p \dots \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{1}$  i  $q \dots \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 4x - 5y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$  paralelni pravci, pa zatim naći jednadžbu ravnine koja ih sadrži.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\vec{s}_p = (3, 2, 1)$ ,  $\vec{s}_q = (9, 6, 3) = 3(3, 2, 1) = 3\vec{s}_p \Rightarrow p \parallel q$ ;  $\pi \dots 13x - 14y - 11z - 3 = 0$ .

**Zadatak 2.97** Zadani su ravnina  $\pi \dots x + 3y - z + 1 = 0$  i pravac  $p \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ . Kroz točku  $P$  presjeka ravnine  $\pi$  i pravca  $p$  pronaći onaj pravac  $q$  iz ravnine  $\pi$  koji je okomit na zadani pravac  $p$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $q \dots \frac{x-2}{2} = \frac{y+\frac{1}{2}}{-3} = \frac{z-\frac{3}{2}}{-7}$ .

**Zadatak 2.98** Zadana je ravnina  $\pi \dots x + 2y + 2z - 18 = 0$ . Točka  $P$  je projekcija ishodišta  $O$  na ravninu  $\pi$ . Naći jednadžbu pravca  $q$  koji prolazi kroz točku  $P$ , a paralelan je s projekcijom pravca  $p \dots \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{1}$  na ravninu  $\pi$ .

**Rješenje.**

Jednadžba traženog pravca je:  $q \dots \frac{x-2}{16} = \frac{y-4}{-13} = \frac{z-4}{5}$ .

**Zadatak 2.99** Zadane su ravnine  $\pi \dots x + 2y - z - 5 = 0$  i  $\rho \dots x - y + 2z - 2 = 0$ . Naći sve točke na osi aplikata koje su podjednako udaljene od ravnina  $\pi$  i  $\rho$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $T_1 = (0, 0, -1)$ ,  $T_2 = (0, 0, 7)$ ,  $d(T_1, \pi) = d(T_1, \rho) \approx 1.633$ ,  $d(T_2, \pi) = d(T_2, \rho) \approx 4.899$ .

**Zadatak 2.100** Na pravcu  $p \dots \frac{x+2}{6} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-4}$  odrediti točku podjednako udaljenu od ravnina  $\pi \dots x - 2y + 2z = 0$  i  $\rho \dots -2x + 4y - 4z + 12 = 0$ .

**Rješenje.**

Za točku  $T = (1, 0, 1)$  vrijedi:  $d(T, \pi) = d(T, \rho) = \sqrt{14}$ .

**Zadatak 2.101** Zadana je ravnina  $\pi \dots 3x + 2y + z - 18 = 0$ . Naći

- površinu trokuta kojega zadana ravnina odsijeca od koordinatnog sustava  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ;
- točku simetričnu točki  $O = (0, 0, 0)$  s obzirom na zadanu ravninu;
- kut između zadane ravnine i osi ordinata.

**Rješenje.**

a) Prvo nađimo vrhove trokuta kojeg zadana ravnina odsijeca od koordinatnog sustava, i to kao presječne točke zadane ravnine sa svakom od koordinatnih os. Za presječnu točku ravnine  $\pi$  s osi apscisa očito vrijedi  $A = (x_A, 0, 0)$ , pa njezinu nepoznatu koordinatu nalazimo tako da uvrstimo  $y = 0$  i  $z = 0$  u jednažbu ravnine  $\pi$ . Dakle, imamo:

$$3x - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 \quad \Rightarrow \quad A = (6, 0, 0).$$

Na sličan način nalazimo i druge dvije točke traženog trokuta, tj. imamo:

$$B = (0, 9, 0) \quad \text{i} \quad C = (0, 0, 18).$$

Sada, traženu površinu trokuta nalazimo kao:

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 18 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |162\vec{i} + 108\vec{j} + 54\vec{k}| = 9\sqrt{126};$$

b) Budući će točka simetrična točki  $O = (0, 0, 0)$  s obzirom na zadanu ravninu ležati na pravcu  $p$  koji prolazi točkom  $O$  a koji stoji okomito na zadanu ravninu, prvo određujemo jednažbu tog pravca. Nije teško zaključiti da vrijedi:

$$p \dots \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}.$$

Zatim, nalazimo parametarsku jednažbu ovog pravca. Vrijedi:

$$p \dots \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

Njezinim uvrštavanjem u opći oblik jednažbe zadane ravnine  $\pi$  dobivamo sjecište pravca  $p$  i ravnine  $\pi$ . Dakle, dobivamo:

$$9t + 4t + t - 18 = 0,$$

odnosno

$$t = \frac{18}{14} = \frac{9}{7},$$

pa sjecište  $\{S\} = p \cap \pi$  ima koordinate:

$$x = \frac{27}{7}, \quad y = \frac{18}{7}, \quad z = \frac{9}{7}.$$

Konačno, budući je točka  $S$  polovište dužine  $\overline{OO'}$ , za koordinate točke  $O'$  vrijedi:

$$O' = (2x_S - x_O, 2y_S - y_O, 2z_S - z_O) \Rightarrow O' = \left( \frac{54}{7}, \frac{36}{7}, \frac{18}{7} \right);$$

c) Kut između zadane ravnine  $\pi$  i osi ordinata nalazimo kao komplement kuta između vektora normale  $\vec{n}_\pi = (3, 2, 1)$  zadane ravnine i vektora  $\vec{j}$ , jediničnog vektora osi ordinata. Dakle, uz oznaku  $\theta = \angle(\vec{n}_\pi, \vec{j})$ , vrijedi:

$$\psi = 90^\circ - \theta \Leftrightarrow \sin \psi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta = \frac{\vec{n}_\pi \cdot \vec{j}}{|\vec{n}_\pi| |\vec{j}|} = \frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow \theta \approx 57^\circ 41' 18''$$

i  $\psi \approx 32^\circ 18' 42''$ .

**Zadatak 2.102** Zadani su pravci  $p \dots \frac{x}{2} = \frac{y-1}{m} = \frac{z}{4}$  i  $q \dots \frac{x-1}{l} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ .

- Odrediti  $m$  i  $l$  tako da je  $p \parallel q$ ;
- Za nađene  $m$  i  $l$  naći udaljenost pravaca  $p$  i  $q$ ;
- Naći jednadžbu ravnine u kojoj leže pravci  $p$  i  $q$ .

**Rješenje.**

- $m = 2, l = 1$ ;
- $d(p, q) = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ;
- $\pi \dots -3x + y + 2z + 1 = 0$ .

**Zadatak 2.103** Zadana je ravnina  $\pi \dots 2x + y - 3z + 4 = 0$ .

- Izračunati površinu trokuta kojega ravnina  $\pi$  odsijeca od koordinatnog sustava  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ;
- Kroz točku  $O''$  simetričnu ishodištu  $O = (0, 0, 0)$  u odnosu na ravninu  $\pi$  postaviti ravninu  $\rho$  paralelno ravnini  $\pi$ .

**Rješenje.**

- $P_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{224}}{3}$ ;
- $\rho \dots 2x + y - 3z + 8 = 0$ .

**Zadatak 2.104**

- Naći ravninu  $\pi$  koja sadrži pravac  $p \dots \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$  i paralelna je pravcu  $q \dots \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{1}$ ;
- Kroz točku  $T = (1, -2, 3)$  postaviti ravninu  $\rho$  paralelnu ravnini  $\pi$ .

**Rješenje.**

- $\pi \dots \frac{9}{2}x + 5y - 6z + \frac{25}{2} = 0$ ;
- $\rho \dots \frac{9}{2}x + 5y - 6z + \frac{47}{2} = 0$ .

**Zadatak 2.105** Odrediti projekciju točke  $T = (3, -4, -2)$  na ravninu određenu paralelnim pravcima:

$$p \dots \frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4} \quad \text{i} \quad q \dots \frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}.$$

**Rješenje.**

Tražena točka je:  $T' = (2, -3, -5)$ .

**Zadatak 2.106** Zadani su pravci  $p \dots \frac{x-5}{a} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{c}$  i  $q \dots \begin{cases} x - 13y + 37 = 0 \\ 4y + z - 9 = 0 \end{cases}$ .

- Odrediti  $a$  i  $c$  tako da pravci  $p$  i  $q$  budu paralelni;
- Za dobivene  $a$  i  $c$  naći jednažbu ravnine  $\pi$  koju određuju pravci  $p$  i  $q$ ;
- Naći projekciju točke  $T = (3, -4, -2)$  na ravninu  $\pi$ .

**Rješenje.**

- $a = 26, c = -8$ ;
- $\pi \dots x - y + 3z + 10 = 0$ ;
- $T' = (2, -3, -5)$ .

**Zadatak 2.107** Zadani su pravci  $p \dots \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$  i  $q \dots \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 1, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t - 1 \end{cases}$ .

- Pokazati da su pravci  $p$  i  $q$  paralelni;
- Naći udaljenost zadanih pravaca;
- Naći jednažbu ravnine  $\pi$  u kojoj leže pravci  $p$  i  $q$ .

**Rješenje.**

- Vrijedi:  $\vec{s}_p \times \vec{s}_q = \vec{0} \Leftrightarrow p \parallel q$ ;
- $d(p, q) = \frac{\sqrt{32}}{3}$ ;
- $\pi \dots -y + z + 2 = 0$ .

**Zadatak 2.108**

- Naći jednažbu ravnine  $\pi$  koja prolazi točkama  $T_1 = (1, 2, 3)$  i  $T_2 = (-3, 7, 1)$ , a na osima apscisa i ordinata odsijeca jednake odsječke;
- Izračunati površinu trokuta kojeg iz ravnine  $\pi$  isijecaju koordinatne ravnine.

**Rješenje.**

- $\pi \dots 2x + 2y + z - 9 = 0$ ;
- $P_{\triangle ABC} = \frac{243}{8}$ .

**Zadatak 2.109** Zadane su točke  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (4, 8, 0)$ ,  $C = (2, 10, 2)$  i  $D = (2, 7, m)$  ( $m \in \mathbb{R}$ ).

- Odrediti  $m$  tako da točke  $A, B, C$  i  $D$  budu komplanarne;
- Za nađeno  $m$  naći udaljenost točke  $D$  od pravca  $p$  kojeg određuju točke  $A$  i  $B$ ;
- Odrediti  $m$  tako da volumen tetraedra s vrhovima  $A, B, C$  i  $D$  bude 15 volumnih jedinica.

**Rješenje.**

a) Za  $m = 2$  zadane točke su komplanarne;

b)  $d(D, p) = \sqrt{3}, \quad p \dots \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 6t + 2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = -3t + 3 \end{cases}$

c)  $V_T = 15 \Leftrightarrow m_1 = 7, m_2 = -3.$

**Zadatak 2.110** Zadane su točke  $A = (1, 2, 1), B = (-1, 1, 0), C = (3, -2, 2)$  i  $D = (2, -1, 3)$ . Izračunati udaljenost točke  $D$  od ravnine  $\pi$  u kojoj leže točke  $A, B$  i  $C$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $d(D, \pi) = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$

**Zadatak 2.111** Točke  $A = (1, 0, 0), B = (1, 1, -1), C = (4, 1, 5)$  i  $D = (0, 2, 2)$  vrhovi su tetraedra. Naći točku  $E$  koja je simetrična točki  $D$  u odnosu na ravninu  $\pi$  određenu točkama  $A, B$  i  $C$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\pi \dots 2x - y - z - 2 = 0, \quad E = (4, 0, 0).$

**Zadatak 2.112** Zadani su pravci  $p \dots \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = -6t + 1 \end{cases}$  i  $q \dots \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}.$

a) Naći kut koji zatvaraju pravci  $p$  i  $q$ ;

b) Napisati jednadžbu ravnine  $\pi$  koja sadrži točku  $T = (1, 0, 1)$  i pravac  $p$ .

**Rješenje.**

a)  $\theta = \angle(p, q) = \frac{\pi}{2} \text{ rad};$

b)  $\pi \dots 3x + z - 4 = 0.$

**Zadatak 2.113** Zadani su točka  $T_1 = (-1, 0, -1)$  i ravnina  $\pi \dots 2x + y - z + 7 = 0$ .

a) Naći točku  $T_2$  koja je simetrična točki  $T_1$  u odnosu na ravninu  $\pi$ ;

b) Kroz točku  $T_2$  postaviti ravninu  $\rho$  paralelno ravnini  $\pi$ ;

c) Izračunati površinu trokuta kojeg su vrhovi točke  $T_1, T_2$  i  $T_3 = (2, 1, 0)$ .

**Rješenje.**

a)  $T_2 = (-5, -2, 1);$

b)  $\rho \dots 2x + y - z + 13 = 0;$

c)  $P_{\Delta} = \sqrt{30}.$

**Zadatak 2.114** Zadani su točka  $T_1 = (1, 2, 8)$  i pravac  $p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$

a) Naći točku  $T_2$  simetričnu točki  $T_1$  u odnosu na pravac  $p$ ;

b) Izračunati udaljenost između točaka  $T_1$  i  $T_2$ ;

c) Naći jednadžbu ravnine  $\pi$  u kojoj leže točka  $T_2$  i pravac  $P$ .

**Rješenje.**

- a)  $T_2 = (5, -4, -6)$ ;
- b)  $d(T_1, T_2) = 2\sqrt{62}$ ;
- c)  $\pi \dots 5x + 8y - 2z - 5 = 0$ .

**Zadatak 2.115** Zadana je ravnina  $\pi \dots 3x + y + 4z - 12 = 0$ . Naći:

- a) površinu trokuta kojeg iz zadane ravnine isijecaju koordinatne ravnine;
- b) jednadžbu pravca  $p$  koji prolazi kroz težište  $T$  trokuta<sup>32</sup> iz prethodnog podzadatka i stoji okomito na zadanu ravninu;
- c) kut između pravca  $p$  (iz prethodnog podzadatka) i pravca  $q$  koji prolazi ishodištem  $O = (0, 0, 0)$  i težištem  $T$ .

**Rješenje.**

- a)  $P_\Delta = 6\sqrt{26}$ ;
- b)  $T = (\frac{4}{3}, 4, 1)$ ,  $p \dots \frac{x - \frac{4}{3}}{3} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 1}{4}$ ;
- c)  $\varphi = \angle(p, q) \approx 57,106^\circ$ .

**Zadatak 2.116** Zadana su tri **uzastopna** vrha paralelograma  $ABCD$ :

$$A = (-3, -2, 0), B = (3, -3, 1) \text{ i } C = (5, 0, 2).$$

- a) Naći kut između dijagonala paralelograma  $ABCD$ ;
- b) Naći jednadžbu ravnine u kojoj leži paralelogram  $ABCD$ ;
- c) Izračunati površinu paralelograma  $ABCD$ .

**Rješenje.**

- a)  $\phi = 60^\circ$ ;
- b)  $\pi \dots -x - y + 5z - 5 = 0$ ;
- c)  $P = 12\sqrt{3}$ .

**Zadatak 2.117** Kroz točke  $A = (1, 1, 1)$  i  $G = (3, 2, 2)$  prolazi pravac  $p$ . Naći kutove što ih s koordinatnim osima gradi projekcija pravca  $p$  na ravninu  $\pi \dots x + 2y - z - 5 = 0$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{i} \quad p' \dots \frac{x-3}{-\frac{3}{2}} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-2}{-\frac{3}{2}}, \quad \alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 45^\circ.$$

**Zadatak 2.118** Odrediti jednadžbu ravnine  $\pi$  s obzirom na koju su pravci

$$p \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \quad \text{i} \quad q \dots \frac{x+1}{1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-2}{1}$$

međusobno zrcalno simetrični.

<sup>32</sup> Težište trokuta — točka u kojoj se sijeku težišnice trokuta. Ako su  $A = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $B = (x_2, y_2, z_2)$ ,  $C = (x_3, y_3, z_3)$  vrhovi trokuta, onda je  $T = (\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$  težište tog trokuta.

**Rješenje.**

Jednadžba tražene ravnine glasi:

$$\pi \dots 3x - 2y + z + 1 = 0.$$

**Zadatak 2.119** Točke  $A = (-1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 0)$  i  $D = (0, 0, 1)$  su tri vrha osnovice (baze) paralelopipeda. Na pravcu  $p \dots x + 1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$  koji prolazi točkom  $A$  odredite vrh  $E$  paralelne osnovice tako da volumen paralelopipeda iznosi 16 volumnih jedinica.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $E_1 = (1, 5, 6)$ ,  $E_2 = (-3, -3, -6)$ .

**Zadatak 2.120** Odrediti međusobnu udaljenost i zajedničku normalu pravaca:

$$p \dots \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{1} \quad \text{i} \quad q \dots \frac{x-6}{1} = \frac{y-12}{2} = \frac{z-8}{-1}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $d(p, q) = 3\sqrt{21}$ ,  $n \dots \frac{x+4}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{4}$ .

**Zadatak 2.121** Zadane su točke  $A = (-1, 6, 3)$  i  $B = (2, 0, -4)$ . Odredite točku  $C$  na pravcu:

$$p \dots \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1},$$

takvu da težište  $T$  trokuta  $\triangle ABC$  leži u ravnini  $\pi \dots x + y + z = 1$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $T = (-\frac{4}{3}, 3, -\frac{2}{3})$ ,  $C = (-5, 3, -1)$ .



## 3.1 Matrice i determinante

### 3.1 Osnovni pojmovi o matricama

**Matrice.** Sustav  $mn$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) elemenata (brojeva), raspoređenih u pravokutnoj tablici od  $m$  redaka i  $n$  stupaca (kolona), nazivamo *matricom*, i označujemo velikim tiskanim latinskim slovom.

*Opći* (po volji odabrani), matični element označavamo malim pisanim latinskim (ponekad i grčkim) slovom zajedno s indeksima, pozivanjem prvo na redak pa zatim na stupac u kojem se taj element nalazi. Tako je, na primjer,  $a_{13}$  element matrice  $A$  koji leži u prvom retku i trećem stupcu ove matrice. Dodatno,  $a_{13} = 2$  naznačava kako je element matrice  $A$  koji se nalazi u prvom retku i trećem stupcu jednak 2. Drugim riječima, matrica se obično zadaje kao pravokutna tablica (shema) svojih elemenata  $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ti su elementi obično brojevi, najčešće realni ili kompleksni, no mogu biti i drugi objekti, poput funkcija, vektora, diferencijalnih operatora, pa čak i samih matrica. Za matricu s  $m$  redaka i  $n$  stupaca,  $m \neq n$ , kažemo kako je pravokutna matrica *tipa*  $m \times n$  ili *tipa*  $(m, n)$ . Iz gornjeg zapisa je evidentno kako je svaki redak matrice sačinjen od elementa čiji je prvi indeks čvrst (fiksiran) i označava redni broj retka, a drugi indeks se mijenja. Slično, svaki stupac matrice sačinjavaju elementi čiji je drugi indeks čvrst i označava redni broj stupca, a prvi se indeks mijenja. Dakle, elementi  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  tvore  $i$ -ti redak matrice, elementi  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$  tvore  $j$ -ti stupac matrice, dok elementi  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{\min\{m,n\}\min\{m,n\}}$  tvore *dijagonalu* matrice. Skup svih matrica tipa  $m \times n$  označavat ćemo sa  $\mathcal{M}_{m,n}$ . Matrice imaju široku [primjenu](#) u inženjerstvu (tehnicima), računalnoj grafici, fizici, bioinformatici, ekonomiji i statistici kao i u inim drugim granama matematike.

**Jednakost matrica.** Dvije matrice  $A$  i  $B$  su *jednake*, i pišemo  $A = B$ , ako su istog tipa (imaju jednak broj redaka i jednak broj stupaca) i ako je  $a_{ij} = b_{ij}$ ,  $(\forall i, j)$ , tj. imaju **jednake odgovarajuće elemente za sve parove indeksa  $i, j$** .

**Kvadratne matrice.** Ako je  $m = n$  kažemo kako je  $A$  *kvadratna* matrica reda  $n$ . Za elemente  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  kažemo kako se nalaze na *glavnoj dijagonali* kvadratne matrice, a za elemente  $a_{n1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1n}$  kažemo kako čine *sporednu dijagonalu* kvadratne matrice  $A$ . Suma elemenata na glavnoj dijagonali kvadratne matrice  $A$  naziva se *tragom* te matrice i označava s  $\text{tr}(A)$ . Dakle, vrijedi  $a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \text{tr}(A)$  (pojam traga matrice definirat ćemo isključivo za kvadratne matrice). Skup svih kvadratnih matrica reda  $n$  označavat ćemo sa  $\mathcal{M}_n$ . Na skupovima  $\mathcal{M}_{m,n}$  i  $\mathcal{M}_n$  definirane su operacije *zbrajanje matrica* i *množenje matrice skalarom*<sup>33</sup> (realnim ili kompleksnim brojem).

**Vektor kao matrica.** Ako je  $m = 1$  kažemo da je  $A$  *retčana matrica* (ima samo jedan redak), a ako je  $n = 1$  kažemo da je  $A$  *stupčana matrica* (ima samo jedan stupac). Retčane i stupčane matrice se još zovu *vektori*. Tako govorimo o *vektor-retku* ili pak o *vektor-stupcu*. Govorimo li samo *vektor*, onda mislimo na *vektor-stupac*.

**Nul-matrica.** Matrica čiji su **svi elementi nule** naziva se *nul-matrica* i označava s  $0$  neovisno o tome kojeg je tipa ili reda. Stupčana matrica čiji su **svi elementi nule** naziva se *nul-vektor*.

**Dijagonalne matrice** (definirana je samo za kvadratne matrice). Matrica kojoj su **svi elementi van glavne dijagonale jednaki nuli** ( $a_{ij} = 0$ ,  $\forall i \neq j$ ) naziva se *dijagonalna matrica*. Poseban slučaj dijagonalne matrice je matrica reda 1, čiji je jedini element neki realni ili kompleksni broj. Ovu matricu možemo poistovjetiti s tim brojem.

**Jedinična matrica.** Dijagonalna matrica kojoj su **svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1** naziva se *jedinična matrica*. Jedinična matrica ima, dakle, jedinice na **svim dijagonalnim** mjestima, a **svi ostali** koeficijenti su joj nule. Označavamo ju slovom  $I$ , ponekad i slovom  $E$ , a ako se želi naglasiti da je ona reda  $n$ , tada se označava s  $I_n$ . Evidentno je kako vrijedi  $I = [\delta_{ij}]$ , gdje s  $\delta_{ij}$  uobičajeno označavamo Kroneckerov<sup>34</sup> delta simbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } i = j, \\ 0 & \text{ako je } i \neq j. \end{cases} \quad (3.1)$$

**Trokutaste matrice** (pojam je definiran samo za kvadratne matrice). Kvadratna matrica  $A = [a_{ij}]$  naziva se *gornja trokutasta matrica* ako je  $a_{ij} = 0$ ,  $\forall i > j$  (**svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki su nuli**), *donje trokutasta matrica* ako je  $a_{ij} = 0$ ,  $\forall i < j$  (**svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki su nuli**). Evidentno je kako su sve dijagonalne matrice **istovremeno** i gornje i donje trokutaste matrice.

**Transponirana matrica.** Matricom  $A = [a_{ij}]$  tipa  $m \times n$  **jednoznačno** je određena matrica  $B = [b_{ji}]$  tipa  $n \times m$ , definirana s

$$b_{ji} = a_{ij} \quad (\forall i, j). \quad (3.2)$$

Tu matricu nazivamo *transponirana matrica* matrice  $A$  i označavamo je s  $A^T$  ili  $A'$ . Prema tome, transponirana se matrica dobiva iz polazne matrice **zamjenom stupaca s redcima**, tj.  $i$ -ti stupac matrice

$A^T$  se podudara s  $i$ -tim retkom matrice  $A$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Ako je npr.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , onda je

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \text{ Nadalje, očito je uvijek } (A^T)^T = A.$$

<sup>33</sup> Skalar je drugi naziv za realan broj. Međutim, po potrebi skalarom nazivamo i kompleksne brojeve.

<sup>34</sup> Leopold Kronecker, njemački matematičar, 1823.–1891.

**(Anti)simetrične matrice.** Matrica  $A$  je simetrična ako je  $A^T = A$ , tj.  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $(\forall i, j)$ . Simetrična matrica **nužno je kvadratna**, jer kod matrica koje nisu kvadratne matrice  $A$  i  $A^T$  nisu istog tipa, pa ne mogu biti jednake. Zbog evidentne simetrije u prirodi, simetrične matrice su česte u primjenama. Matrica je antisimetrična ako vrijedi  $A^T = -A$ , tj.  $a_{ij} = -a_{ji}$ ,  $(\forall i, j)$ . Antisimetrična matrica nužno je kvadratna i ima nule na glavnoj dijagonali ( $a_{ij} = a_{ji} \Rightarrow a_{ii} = 0, \forall i, j$ ).

## 3.2 Operacije s matricama

**Zbrajanje matrica.** Zbrajati se mogu samo matrice istoga tipa. Ako su  $A$  i  $B$  matrice istoga tipa, tada je njihov zbroj matrica

$$C = A + B,$$

matrica istoga tipa kao matrice  $A$  i  $B$ , za čije elemente vrijedi:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\forall i, j). \quad (3.3)$$

(Dvije se matrice zbrajaju tako da im se zbroje odgovarajući elementi.)

**Primjer 3.1** Odrediti zbroj  $A + B$  ako su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$A + B = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \boxed{2} \\ -3 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \textcircled{0} & \boxed{1} \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \boxed{3} \\ 0 & 6 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}.$$

Zbrajanje matrica iz  $\mathcal{M}_{m,n}$  ima sljedeća svojstva:

- |      |                                                                                                       |                                            |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| (Z1) | $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,                                                                         | (asocijativnost)                           |
| (Z2) | $A + B = B + A$ ,                                                                                     | (komutativnost)                            |
| (Z3) | za svaku matricu $A$ vrijedi<br>$A + 0 = 0 + A = A$ ,                                                 | (postojanje neutralnog elementa)           |
| (Z4) | za svaku matricu $A$ postoji njoj <i>suprotna</i><br><i>matrica</i> $-A$ takva da je $A + (-A) = 0$ , | (postojanje suprotnog elementa)            |
| (Z5) | $(A + B)^T = A^T + B^T$ ,                                                                             | za svaku $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}$ . |

**Množenje matrice skalarom.** Neka su  $\lambda \in \mathbb{R}$  i  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  bilo koji skalar i matrica tipa  $m \times n$ . Umnožak matrice  $A$  skalarom  $\lambda$  je matrica

$$B = \lambda A,$$

matrica istoga tipa kao matrica  $A$  s elementima:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (\forall i, j). \quad (3.4)$$

Dakle, matrica se množi skalarom tako da se **svaki njezin element množi tim skalarom**.

**Primjer 3.2** Izračunati umnožak  $-2A$  ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$-2A = -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 8 \\ -4 & 4 & -10 \end{bmatrix}.$$

Množenje matrica iz  $\mathcal{M}_{m,n}$  skalarom ima sljedeća svojstva:

- |                                                |                                                                     |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| (S1) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$ | (distributivnost prema zbrajanju matrica)                           |
| (S2) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$   | (distributivnost prema zbrajanju skalara)                           |
| (S3) $(\lambda \mu)A = \lambda(\mu A),$        | (kvaziasocijativnost)                                               |
| (S4) $0 \cdot A = 0,$                          |                                                                     |
| (S5) $1 \cdot A = A,$                          | (netrivijalnost množenja)                                           |
| (S6) $(\lambda A)^T = \lambda A^T,$            | za svaku $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$ |

**Suprotna matrica.** Za  $\lambda = -1$ , matricu  $(-1)A$  označavamo s  $-A$  i zovemo *suprotna matrica* matrice  $A$ . Sada je evidentno kako se **matrično oduzimanje** može definirati pravilom:

$$A - B = A + (-B),$$

kao i da vrijedi:

$$(A - B)^T = A^T - B^T.$$

**Linearna (ne)zavisnost.** Operacije koje su definirane na skupovima  $\mathcal{M}_{m,n}$  i  $\mathcal{M}_n$ , omogućuju da pravimo linearne kombinacije matrica. Neka su zadane matrice  $A_1, A_2, \dots, A_k$  istog tipa, i realni brojevi  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ . *Linearnom kombinacijom* matrica  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nazivamo matricu oblika:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k.$$

Brojeve  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  zovemo *koeфицијentima* linearne kombinacije. Za matrice  $A_1, A_2, \dots, A_k$  istog tipa kažemo da su *linearno nezavisne*, ako:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0.$$

U protivnom kažemo da su *linearno zavisne*. U tom slučaju se barem jedna od njih može prikazati kao linearna kombinacija preostalih. Dodatno, za matričnu linearnu kombinaciju (s koefицијentima  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ) kažemo da je **trivijalna**<sup>35</sup>, ako je  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ ; u protivnom, tj. čim je barem jedan od koefицијentata  $\lambda_i \neq 0, i \in [1, k]_{\mathbb{N}}$ , govorimo o **netrivijalnoj** matričnoj linearnoj kombinaciji. Stoga, matrice  $A_1, A_2, \dots, A_k$  istog tipa bit će linearno zavisne ako se nul-matrica istog tipa može prikazati kao neka njihova netrivijalna linearna kombinacija.

<sup>35</sup> Ako je matrična linearna kombinacija  $K = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_k A_k$  trivijalna onda je očito  $K = 0$ , ali ne i obratno!

**Primjer 3.3** Odrediti matričnu linearnu kombinaciju  $2A + 3B - C$  ako su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Što iz toga možemo zaključiti o linearnoj nezavisnosti matrica  $A$ ,  $B$  i  $C$ ?

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$2A + 3B - C = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, postoji netrivialna kombinacija matrica  $A$ ,  $B$  i  $C$  koja daje nul-matricu, pa su matrice  $A$ ,  $B$  i  $C$  linearno zavisne. Primjerice, matrica  $C$  **zavisi** od matrica  $A$  i  $B$  po formuli:

$$C = 2A + 3B.$$



**Umnožak vektor–retka i vektor–stupca.** Neka su redom  $[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$  i  $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  vektor–redak

i vektor–stupac **iste duljine**. Njihov se umnožak definira na način:

$$[a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (3.5)$$

Rezultat ovog množenja je matrica reda 1 koju poistovjećujemo sa skalarom!

**Množenje matrica.** Množiti se mogu **samo** matrice kod kojih su dimenzije u posebnom odnosu, tj. samo tzv. *ulančane matrice*. Za uređeni par matrica  $(A, B)$  kažemo da je ulančan ako druga matrica ima toliko redaka, koliko prva ima stupaca. Na primjer, matrice  $A$  i  $B$  su ulančane ako je matrica  $A$  tipa  $m \times n$ , a matrica  $B$  tipa  $n \times p$  (pri tom  $m$  i  $p$  mogu biti bilo kakvi). Rezultat je ovog množenja matrica tipa  $m \times p$  (ima isti broj redaka kao matrica  $A$  i isti broj stupaca kao matrica  $B$ ). Neka su  $A = [a_{ij}]$  i  $B = [b_{ij}]$  redom matrice tipa  $m \times n$  i  $n \times p$ . Opći element umnoška  $C = AB$  dan je formulom:

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}. \quad (3.6)$$

Dakle, matrični element  $c_{ij}$  je zbroj svih umnožaka odgovarajućih elemenata iz  $i$ –toga retka matrice  $A$  s onima iz  $j$ –toga stupca matrice  $B$ . **Tehnika množenja matrica** prikazana je Slikom 3.1.

Važno je istaći sljedeće **neuobičajeno** svojstvo:

! čak iako je umnožak  $AB$  definiran, umnožak  $BA$  to ne mora biti.

Zbog ovog svojstva, ali i u slučaju da postoje  $AB$  i  $BA$ , vrijedi da množenje matrica **općenito NIJE** komutativno, tj. općenito je  $AB \neq BA$ . Stoga, moramo posebno razmatrati množenje matrica s lijeve i s desne strane, i voditi o tome računa, posebice u zadaćama rješavanja matričnih jednadžbi.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \boxed{a} & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1a+2b} & 1c+2d \\ 3a+4b & 3c+4d \end{bmatrix}$$

Slika 3.1: Tehnika množenja dviju matrica dimenzija  $2 \times 2$ .

**Primjer 3.4** Neka su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{3} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \boxed{3} & -4 \\ 1 & 3 & \boxed{2} & 4 \\ 3 & 6 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Ako postoji matrica  $C = AB$ , odrediti njezin element  $c_{23}$ !

**Rješenje.**

Matrica  $C = AB$  **postoji** jer matrica  $B$  ima onoliko redaka, koliko matrica  $A$  ima stupaca (ulančane su). Nadalje, vrijedi:

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = \boxed{19}.$$

Za proizvoljne matrice  $A, B, C$  i skalar  $\lambda$ , te za odgovarajuću jediničnu matricu  $I$  i nul-matricu  $O$ , ako su svi umnoški definirani, vrijede sljedeća svojstva množenja:

- |                                                    |                                  |
|----------------------------------------------------|----------------------------------|
| (M1) $(AB)C = A(BC)$ ,                             | (asocijativnost)                 |
| (M2) $A(B+C) = AB+AC$ ,                            | (distributivnost s lijeva)       |
| (M3) $(A+B)C = AC+BC$ ,                            | (distributivnost s desna)        |
| (M4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ , | (kvaziasocijativnost)            |
| (M5) $AI = IA = A$ ,                               | (postojanje neutralnog elementa) |
| (M6) $A0 = 0A = O$ ,                               |                                  |
| (M7) $(AB)^T = B^T A^T$ .                          |                                  |

Važno je istaći i dodatna dva **neuobičajena** svojstva množenja matrica:

- ! ako je  $A \neq O$ , jednakost  $AB = AC$  ne povlači nužno  $B = C$ ,
- ! ako je  $AB = O$ , tada ne mora biti  $A = O$  **NITI**  $B = O$ .

**Matrični polinom.** Neka je  $A$  kvadratna matrica. Tada se *potencija* matrice  $A$  definira induktivno (definirana je samo za kvadratne matrice):

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^{n+1} = A^n A, \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Lako se dokazuje da vrijedi:

$$A^m A^n = A^n A^m = A^{m+n}, \quad (A^n)^m = A^{mn}, \quad (\forall m, n \in \mathbb{N}).$$

Ako je  $f(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$  bilo koji polinom stupnja  $m$ , tada *matrični polinom*, za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A$ , definiramo kao:

$$f(A) := \alpha_m A^m + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I. \quad (3.7)$$

Kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$  nazivamo:

- |                                            |                                                       |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> involutivnom      | $\Leftrightarrow A^2 = I,$                            |
| <input type="checkbox"/> anti-involutivnom | $\Leftrightarrow A^2 = -I,$                           |
| <input type="checkbox"/> idempotentnom     | $\Leftrightarrow A^2 = A,$                            |
| <input type="checkbox"/> nilpotentnom      | $\Leftrightarrow A^p = 0$ za neko $p \in \mathbb{N}.$ |

**Primjer 3.5** Odrediti  $f(A)$  ako su zadani:

$$\text{matrica } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \text{polinom } f(x) = x^2 - 2x + 3.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$f(A) = A^2 - 2A + 3I.$$

Nadalje, imamo:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Sada je:

$$f(A) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}.$$



### 3.3 Regularne matrice i Gaussov algoritam za invertiranje matrice

**Regularne matrice.** Za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$  kažemo da je *regularna matrica* (invertibilna ili *nesingularna*) ako postoji kvadratna matrica  $B$  za koju vrijedi:

$$AB = BA = I.$$

**Inverzna matrica.** Matricu  $B$  koja zadovoljava gornji identitet nazivamo *inverznom matricom* matrice  $A$ , i označavamo ju s  $A^{-1}$ . Dakle, za svaku regularnu matricu  $A$  vrijedi:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Inverzna matrica  $A^{-1}$  matrice  $A$  je, ako postoji, **jedinstvena**, nužno kvadratna i **istog reda** kao matrica  $A$ , te za nju dodatno vrijedi da je:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Jedinična matrica  $I$  je regularna i sama sebi inverzna ( $I^{-1} = I$ ) jer vrijedi  $I \cdot I = I$ . Inače, za kvadratnu matricu  $A$  za koju vrijedi  $A^{-1} = A$  kažemo da je *involutivna* (nije teško dokazati kako je svojstvo  $A^{-1} = A$  ekvivalentno s  $A^2 = I$ ). Postoje brojne kvadratne matrice  $A$  koje **nemaju** inverznu matricu  $A^{-1}$ . Za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$  kažemo da je *singularna* ako nije regularna. Kvadratna matrica  $A$  reda  $n$  je singularna **akko** postoji **netrivijalni** vektor–stupac  $s \in \mathbb{R}^n$  takav da je  $As = 0$ .

Ako su  $A$  i  $U$  regularne matrice,  $\lambda \neq 0$  proizvoljan skalar i  $n \in \mathbb{N}$  proizvoljan, tada su i matrice  $AU$ ,  $\lambda A$ ,  $A^n$ ,  $A^T$  regularne i vrijedi:

$$(AU)^{-1} = U^{-1}A^{-1}, \quad (A^n)^{-1} = (A^{-1})^n,$$

$$(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Prva formula u prethodnome paragrafu vrijedi i za umnožak  $m$  regularnih matrica — ako su  $A_1, \dots, A_m$  regularne, tada je i matrica  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m$  regularna i vrijedi:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_m)^{-1} = A_m^{-1} \cdot \dots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

Ispitivanje regularnosti kvadratne matrice  $A$ , kao i računanje njezine inverzne matrice  $A^{-1}$  moguće je vezati za pojam linearne (ne)zavisnosti matrica, teoriju determinanti<sup>36</sup>, o čemu će više biti riječi u odjeljku 3.5, za njezin rang<sup>37</sup> (vidi odjeljak 3.6), te za takozvani **Gaussov algoritam** za invertiranje matrice.

**Elementarne transformacije matrice.** Neka je  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ . Elementarnom transformacijom matrice  $A$  (ili nad matricom  $A$ ) nazivamo svaki od ovih postupaka:

- (E1) zamjena dvaju redaka (ili dvaju stupaca) matrice  $A$  (permutiranje redaka ili stupaca),
- (E2) množenje nekog retka (ili nekog stupaca) matrice  $A$  bilo kojim skalarom **različitim od nule**,
- (E3) dodavanje nekog retka (ili nekog stupaca) matrice  $A$  bilo kojem drugom retku (ili bilo kojem drugom stupcu) te matrice.

**Ekvivalentne matrice.** Neka su  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$  dvije matrice istog tipa. Kažemo da je matrica  $A$  *ekvivalentna* (ili *slična*<sup>38</sup>) matrici  $B$ , i pišemo

$$A \sim B,$$

ako postoji **konačan niz** matrica istog tipa

$$A = A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k = B$$

sa svojstvom da se matrica  $A_i$  dobiva primjenom jedne od elementarnih transformacija (E1)–(E3) na matricu  $A_{i-1}$ , za svaki  $i = 2, 3, \dots, k$ . Očito je da je  $\sim$  jedna **relacija ekvivalencije**<sup>39</sup> na skupu  $\mathcal{M}_{m,n}$  (cijepa skup svih matrica tipa  $m \times n$  na međusobno disjunktne podskupove, takozvane **klase ekvivalencije**). Nadalje, za dvije kvadratne matrice istoga reda,  $A, B \in \mathcal{M}_n$ , vrijedi da je matrica  $A$  ekvivalentna matrici  $B$  **akko** postoji regularna matrica  $T \in \mathcal{M}_n$  takva da vrijedi:

$$B = T^{-1}AT \quad (\text{ili } TB = AT).$$

Za regularnu matricu  $T$  u tom slučaju kažemo da obavlja *konjugiranje* (ili *sprezanje*) matrica  $A$  i  $B$ . Dodatno, ako je kvadratna matrica  $A$  regularna i  $B$  ekvivalentna s njom, tada je i matrica  $B$  regularna.

Elementarne transformacije matrice bit će nam od velike koristi i pri rješavanju nekoliko drugih problema matrice algebre, kao na primjer pri rješavanju linearnih sustava (vidi sljedeće poglavlje), pri računanju determinanti kvadratnih matrica, te pri određivanju ranga proizvoljne matrice.

<sup>36</sup> Neka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . Ona je regularna **akko** vrijedi  $\det(A) \neq 0$ .

<sup>37</sup> Za kvadratnu matricu  $n$  – tog reda kažemo da je regularna ako joj je rang jednak  $n$ .

<sup>38</sup> Slične matrice nisu “slične” u laičkom smislu — one mogu izgledati naizgled posve različito, kao što i to što se neke dvije matrice istog tipa razlikuju možda tek u nekoliko elemenata ne govori ništa o njihovoj sličnosti.

<sup>39</sup> Binarna relacija na skupu koja je *refleksivna*, *simetrična* i *transitivna*.

**Primjer 3.6** Ispitati ekvivalentnost matrica:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Ispitajmo postojanje kvadratne matrice  $T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ , takve da vrijedi  $TB = AT$ , odnosno:

$$\begin{bmatrix} -4a - 10c & 3a + 7c \\ -4b - 10d & 3b + 7d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a + 6b & -2c + 6d \\ -2a + 5b & -2c + 5d \end{bmatrix}.$$

Sada, izjednačavanjem odgovarajućih elemenata mora vrijediti:

$$\begin{cases} -4a - 10c = -2a + 6b \\ -2c + 6d = 3a + 7c \\ -4b - 10d = -2a + 5b \\ -2c + 5d = 3b + 7d \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{a = -5, b = 0, c = 1 \text{ i } d = -1}.$$

Dobivena kvadratna matrica  $T = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  je regularna, jer sličnim postupkom nalazimo kako postoji (**jedinstvena**) kvadratna matrica  $M = \begin{bmatrix} -1/5 & -1/5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , za koju vrijedi:

$$TM = MT = I.$$

Dakle, zadane matrice  $A$  i  $B$  su ekvivalentne! ■

**Gaussov<sup>40</sup> algoritam (postupak) za invertiranje matrice.** Ovaj algoritam se zasniva na elementarnim transformacijama **samo nad retcima** kvadratne matrice, kojima se **ne mijenja** broj linearno nezavisnih redaka te matrice. Za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$  ovaj postupak je formalno opisan sljedećim koracima:

- [K1]** Formiramo **blok**<sup>41</sup> matricu  $[A \mid I]$  tipa  $n \times 2n$ , u kojoj je s desna matrice  $A$  napisana jedinična matrica  $I$  istoga reda kao i matrica  $A$ .
- [K2]** Vršimo Gaussove elementarne transformacije **samo nad retcima** ove blok matrice dok u lijevom bloku ne dobijemo jediničnu matricu  $I$ , tj. dok ne dobijemo blok matricu oblika  $[I \mid B]$ , **ili** dok u lijevom bloku ne dobijemo **nul-redak**.
- [K3]** Ako smo u lijevom bloku uspjeli dobiti matricu  $I$ , onda je kvadratna matrica  $A$  regularna i vrijedi  $A^{-1} = B$ . Ako smo pak u lijevom bloku dobili nul-redak, onda kvadratna matrica  $A$  nije regularna i ne postoji njoj inverzna matrica.

<sup>40</sup> Carl Friedrich Gauss, njemački matematičar i astronom, 1777.–1855. Svestrani matematički genij i jedan od najvećih matematičara uopće.

<sup>41</sup> Blok matrica je matrica podijeljena na manje pravokutne matrice, koje nazivamo **blokovima**. Te blokove možemo smatrati pojedinačnim elementima matrice, što omogućuje pojednostavljenu analizu i operacije nad njom, osobito kod velikih dimenzija.

**Primjer 3.7** Gaussovim algoritmom za invertiranje odredite inverznu matricu  $A^{-1}$  matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned} [A \mid I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \right\} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\sim \{R_3 + 2R_2\} \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] = [I \mid B]. \end{aligned}$$

Dakle, zadana matrica  $A$  je regularna i vrijedi:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$



### 3.4 Matrice i jednačbe

**Linearne matrice jednačbe s kvadratnim matricama.** Linearne matrice jednačbe s kvadratnim matricama su jednačbe oblika

$$AX = B, \tag{3.8}$$

odnosno

$$YA = C, \tag{3.9}$$

gdje su  $A$ ,  $B$  i  $C$  zadane, poznate matrice **uz uvjet** da je broj redaka matrica  $B$  i  $C$  jednak redu kvadratne matrice  $A$ , a  $X$  i  $Y$  su matrice **nepoznanica**, **ulančane** s kvadratnom matricom  $A$ .

Ako je matrica  $A$  regularna, jednačba (3.8) ima **jedinstveno rješenje**. Ovu jednačbu rješavamo množenjem s lijeva inverznom matricom  $A^{-1}$  matrice  $A$ . Dakle, za kvadratnu matricu  $A$  matrice jednačba  $AX = B$  ima rješenje  $X = A^{-1}B$  jedino ako je  $A$  regularna matrica, i analogno, matrice jednačba  $YA = C$  ima rješenje  $Y = CA^{-1}$  jedino ako je  $A$  regularna matrica. Ako  $A$  nije regularna matrica, opisana metoda se **ne može** primijeniti (jer ne postoji  $A^{-1}$ ). U ovom slučaju, obje jednačbe ili **nemaju rješenja** ili ih imaju **beskonačno mnogo**. Kod rješavanja linearnih matrice jednačbi s kvadratnim matricama moramo biti na dodatnom **oprezu**, odnosno stalno imati na umu da množenje matrica općenito nije komutativno, kao i da množenje s desna valja razlikovati od množenja s lijeva!

**Linearne matrične jednadžbe s pravokutnim matricama tipa  $m \times n$ ,  $m \neq n$ .** Linearne matrične jednadžbe s pravokutnim matricama  $m \times n$ ,  $m \neq n$  su također jednadžbe oblika (3.8) ili (3.9), gdje su  $A$ ,  $B$  i  $C$  zadane, poznate matrice **uz uvjete** da su matrice nepoznanica  $X$  i  $Y$  **ulančane** s pravokutnom matricom  $A$  tipa  $m \times n$ . U tom slučaju je broj redaka matrice  $B$  jednak broju  $m$ , broj stupaca matrice  $B$  je jednak broju stupaca matrice  $X$ , i dodatno broj redaka matrice  $C$  je jednak broju redaka matrice  $Y$  i broj stupaca matrice  $C$  je jednak broju  $n$ .

Ako su svi uvjeti ispunjeni, rješavanje jednadžbi (3.8) i (3.9) se svodi na rješavanje pridruženih linearnih sustava (vidi Primjer 3.8).

**Primjer 3.8** Riješiti matričnu jednadžbu  $AX = B$ , gdje su:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Očito matrica  $X$  mora biti tipa  $2 \times 3$ , pa je zapišimo u obliku  $X = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{bmatrix}$ . Sada, vrijedi:

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a & 2c & 2e \\ 2a - 3b & 2c - 3d & 2e - 3f \\ a - b & c - d & e - f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata u gornjim matricama slijedi:

$$\begin{cases} 2a = 2, & 2c = 0, & 2e = 6 \\ 2a - 3b = -1 \\ 2c - 3d = -6 \\ 2e - 3f = 0 \\ a - b = 0 \\ c - d = -2 \\ e - f = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 1, c = 0, d = 2, e = 3 \text{ i } f = 2.$$

Dakle, tražena matrica  $X$  glasi:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

### 3.5 Pojam determinante. Osnovna svojstva

**Determinanta.** Svakoј je kvadratnoj matrici reda  $n$  pridružen skalar — njezina *determinanta*. Taj broj označavamo s  $\det(A)$  ili pak s  $|A|$ . Pri računanju determinanti koristit ćemo i zapis:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kako je ovaj zapis sličan onome kod matrica (sada, razlikovanja radi, pripadajuću pravokutnu tablicu zapisujemo u okomitim zgradama), govorit ćemo — baš kao i kod matrica — o elementima determinante, njezinom retku ili stupcu, iako je ona (kad se izračuna) tek jedan broj.

Determinante kvadratnih matrica definirat ćemo **induktivno** po njihovu redu  $n$ . Krenut ćemo od kvadratnih matrica maloga reda. Za  $n = 1$  i matricu  $A = [a_{11}]$  definiramo<sup>42</sup>:

$$\det(A) = |a_{11}| := a_{11}.$$

Za kvadratnu matricu reda 2, odnosno za  $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$  definiramo:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

(Determinanta kvadratne matrice reda 2 jednaka je razlici umnoška elementa glavne i umnoška elemenata sporedne dijagonale.)

Determinante kvadratnih matrica reda  $n$  većeg od 2, odnosno  $n > 2$ , definirat ćemo induktivno, tj. determinantu reda  $n$  definirat ćemo kao zbroj  $n$  determinanti reda  $n - 1$ . Za ovu definiciju potrebno je uvesti pojmove *minore* i *algebarskog komplementa* matrice, određene nekim njezinim elementom.

**Minora elementa**  $a_{ij}$ . Neka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . *Minora*  $D_{ij}$  elementa  $a_{ij}$  matrice  $A$  je determinanta matrice koja nastaje kad iz matrice  $A$  **ispustimo (uklonimo, eliminiramo ili precrtamo)**  $i$ -ti redak i  $j$ -ti stupac. Pojam minore može se **generalizirati**: pod *minorom reda*  $k$  matrice  $A$  tipa  $m \times n$ ,  $m \neq n$  i  $k \leq \min\{m, n\}$ , podrazumijevamo determinantu **bilo koje** matrice koja nastaje kad iz matrice  $A$  ispustimo  $m - k$  redaka i  $n - k$  stupaca.

**Algebarski komplement elementa**  $a_{ij}$ . Neka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . *Algebarski komplement* (kofaktor ili *adjunkt*)  $A_{ij}$  elementa  $a_{ij}$  matrice  $A$  je broj definiran sa:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Determinanta** proizvoljne kvadratne matrice  $A$  reda  $n$  većeg od 2 je broj  $\det(A)$  definiran s (razvoj po  $i$ -tom retku):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

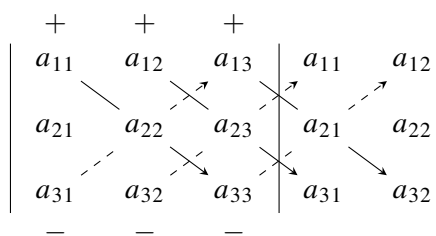
ili (razvoj po  $j$ -tom stupcu):

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Razvoji pomoću kojih je definirana determinanta nazivaju se još i *Laplaceovi razvoji*<sup>43</sup> po retku ili stupcu, te se može pokazati da **svi daju isti rezultat**. Dakle, determinanta proizvoljne kvadratne matrice reda  $n$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 2$ ) je dobro definirana.

<sup>42</sup> Ovdje  $|a_{11}|$  označava determinantu, ne apsolutnu vrijednost. Također, zapis determinante  $|A|$  ne treba dovoditi u vezu s “apsolutnom vrijednošću matrice” jer ta nije niti će ikad biti definirana.

<sup>43</sup> Pierre Simon de Laplace, francuski matematičar i astronom, 1749.–1827.



**Slika 3.2:** Sarrusovo pravilo za računanje determinante proizvoljne kvadratne matrice reda 3.

**Sarrusovo<sup>44</sup> pravilo.** Za razvoj determinante kvadratne matrice  $A$  reda 3 po njezinu **prvom retku** vrijedi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Dakle, možemo uočiti kako se determinanta proizvoljne kvadratne matrice reda 3 računa kao suma 6 pribrojnika, svaki od kojih je umnožak tri elementa te matrice, pri čemu se tri pribrojnika zbrajaju, a tri oduzimaju. Ovakav uočeni zakon daje nam jednostavno **memotehničko pravilo** za izračunavanje determinanti kvadratnih matrica reda 3, kojeg zovemo *Sarrusovo pravilo*. Algoritam prikazan Slikom 3.2 kaže da se:

determinanti proizvoljne kvadratne matrice reda 3 **dopišu s desna prva dva njezina stupca**, pa se onda **zbrajaju umnošci elemenata na glavnoj dijagonali** i njoj paralelnim pravicima (padajuće dijagonale) i od toga se **oduzimaju umnošci elemenata na sporednoj dijagonali** i njoj paralelnim pravicima (rastuće dijagonale).

Analogno pravilo dobivamo ako, alternativno, **ispod determinante** proizvoljne kvadratne matrice reda 3 **pripišemo njezina prva dva retka!**

**Primjer 3.9** Sarrusovim pravilom izračunati determinantu matrice:  $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 7 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} \\ = 7 \cdot 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \cdot 4 = \boxed{12}.$$

<sup>44</sup> Pierre Frédéric Sarrus, francuski matematičar, 1798.–1861.

**Svojstva determinanata.** Nažalost, lako je primijetiti kako izračunavanje determinanti kvadratnih matrica višeg reda **nužno** prati veliki broj operacija množenja i zbrajanja na njezinim elementima (ukupno  $n \cdot n! - 1$ ). Tako npr. determinanta kvadratne matrice reda 10 ima  $10! = 3\,628\,800$  osnovnih pribrojnika, a **svaki** pribrojnik je umnožak od po jednog elementa iz svakoga retka i svakoga stupca ove matrice. Nasreću, računanje se može **znatno** pojednostaviti koriste li se neka “lijepa” svojstva determinanata. Za determinante vrijede sljedeća *osnovna svojstva*:

- (D1) determinanta ne mijenja vrijednost ako njene retke zamijenimo stupcima ili obrnuto, odnosno  $\det(A) = \det(A^T)$  (stoga sva dalje navedena svojstva za retke determinante vrijede i za njene stupce),
- (D2) determinanta je jednaka nuli ako su elementi dvaju njenih redaka jednaki ili proporcionalni ili je jedan redak linearna kombinacija nekih drugih redaka ili ako su svi elementi nekog retka jednaki nuli,
- (D3) zamjenom dvaju redaka determinanta mijenja predznak,
- (D4) faktor, zajednički svim elementima nekog retka, možemo izlučiti (staviti) ispred determinante (ekvivalentno: determinanta se množi nekim brojem tako da se tim brojem pomnože svi elementi samo jednog retka),
- (D5) ako se dvije determinante istog reda  $n$ , razlikuju samo u elementima jednog te istog retka, onda se one smiju zbrojiti tako da se zbroje odgovarajući elementi tih redaka, dok se ostali retci ne mijenjaju,
- (D6) dodamo (oduzmemo) li nekom retku elemente drugog retka ili linearnu kombinaciju drugih redaka, ne mijenjamo vrijednost determinante,
- (D7) za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$  i bilo koji skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  je:  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ ,
- (D8) determinanta trokutaste matrice jednaka je produktu elemenata na njezinoj glavnoj dijagonali,
- (D9) za determinantu umnoška dvije kvadratne matrice istog reda  $n$  vrijedi **Binet–Cauchyjev**<sup>45</sup> **teorem**:  $\det(AB) = \det(BA) = \det(A)\det(B)$ , odnosno  $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$  (ako je  $\det(A) \neq 0$ , tj. ako je  $A$  regularna kvadratna matrica),
- (D10) suma umnožaka svih elemenata  $a_{ij}$  nekog ( $i$ –tog) retka determinante reda  $n$  s algebarskim komplementima  $A_{jk}$  pripadajućih elemenata drugog ( $j$ –tog) retka jednaka je nuli:  

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j).$$

Svojstva (D3) i (D4) nam jasno kazuju kako elementarne transformacije kvadratne matrice **ne čuvaju** vrijednost njezine determinante. Ipak, vrijedi sljedeće važno svojstvo (neposredna i jednostavna posljedica **Binet–Cauchyjevog teorema**):

- ! determinante dviju međusobno ekvivalentnih kvadratnih matrica su ili obje jednake nula ili obje različite od nula (slične kvadrane matrice imaju istu determinantu i isti trag, ali obrat ne vrijedi).

Nadalje, nije teško zaključiti kako je za kvadratne matrice višeg reda, **efikasniji i brži** način računanja njihovih determinanti, onaj koji elementarnim transformacijama matricu svodimo na gornju trokutastu matricu, a zatim determinantu odredimo prema osnovnome svojstvu (D8). Može se pokazati kako algoritam za računanje determinante kvadratne matrice reda  $n$  u ovome slučaju zahtijeva približno  $2n^3/3$  operacija, što prema  $n \cdot n! - 1$  operacija jamči golemu uštedu u vremenu potrebnom za računanje.

<sup>45</sup> Jacques Philippe Marie Binet, francuski matematičar i astronom, 1786.–1856.,  
Augustin Louis Cauchy, francuski matematičar, 1789.–1857.

**Primjer 3.10** Izračunati determinantu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_4 + R_1 \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} R_3 - R_2 \\ R_4 + 2R_2 \end{array} \right\} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \{R_4 - R_3\} \\ &= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 6 \cdot [1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot (-4)] = \boxed{24}. \end{aligned}$$

**Determinanta i inverzna matrica.** Neka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . Ako je  $A$  regularna matrica, onda je:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T,$$

gdje je matrica  $\tilde{A}^T = \text{adj}(A)$  *adjunkta* matrice  $A$ , a matrica  $\tilde{A}$  *matrica algebarskih komplementa* matrice  $A$  (matrica čiji su elementi algebarski komplementi originalne matrice  $A$ ). Dodatno, vrijedi:

- ! kvadratna matrica  $A$  reda  $n$  je regularna **akko** je  $\det(A) \neq 0$ ,
- !  $A\tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = \det(A)I$ ,
- !  $\det(A) \cdot \det(\tilde{A}^T) = (\det(A))^n$ .

Primijetimo kako  $A\tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = \det(A)I$  vrijedi čak i ako je  $\det(A) = 0$ . Nakon svega, algoritam računanja inverne matrice za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$ , primjenom determinanti, formalno je opisan sljedećim koracima:

- [K1] Računamo **determinantu** matrice  $A$ , tj.  $\det(A)$ . Ako je determinanta različita od nule, nastavljamo. Inače, matrica **nema** inverza.
- [K2] Odredimo algebarski komplement **svakog** matričnog elementa u matrici  $A$  i formiramo **matricu algebarskih komplementa**.
- [K3] **Transponiramo** dobivenu matricu algebarskih komplementa i zatim je podijelimo s izračunatom determinantom.

**Primjer 3.11** Izračunati (ako postoji) inverznu matricu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \text{razvoj po 2. stupcu} \\ &= 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot (16 - 3) + 5 \cdot (8 - 3) = -26 + 25 = -1 \neq 0. \end{aligned}$$

Dakle, postoji  $A^{-1}$ !

Nadalje, vrijedi:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 40 & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -13 & A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \\ A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = -16 & A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 5 & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -9 & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 & A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Sada je:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 40 & -13 & -5 \\ -16 & 5 & 2 \\ -9 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$



### 3.6 Matričin rang

**Podmatrice.** Neka je zadana proizvoljna pravokutna matrica  $A$  tipa  $m \times n$ . *Podmatrica* matrice  $A$  je svaka matrica koja se iz matrice  $A$  može dobiti **uklanjanjem (eliminacijom) bilo kojih** njezinih redaka i/ili stupaca. Analogno, ako se u pravokutnoj matrici  $A$  tipa  $m \times n$  uoči bilo kojih  $r$  redaka i  $s$  stupaca,  $1 \leq r \leq m$  i  $1 \leq s \leq n$ , onda **sva** njihova “presjecišta” tvore matricu tipa  $r \times s$  koju nazivamo *podmatricom* ili *submatricom* matrice  $A$ . Posebno će nam biti važni slučajevi  $m = n$  i  $r = s = n - 1$ , tj. podmatrice što se dobivaju **uklanjanjem točno jednog** retka i točno jednog stupca iz kvadratne matrice  $A$ . Očito je svaka matrica sama sebi podmatrica dobivena uklanjanjem 0 redaka i 0 stupaca. Posebno je svaki element matrice  $A$ , jedna njezina podmatrica.

**Poddeterminante.** Determinantu kvadratne podmatrice ( $r = s$ ) nazivamo *poddeterminantom* matrice  $A$ . Ako je  $A$  kvadratna matrica ( $m = n$ ), govorimo i o *poddeterminanti* determinante  $\det(A)$ .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Slika 3.3: Nekoliko različitih podmatrica proizvoljne kvadratne matrice  $A$  reda 4.

**Rang matrice.** U prethodnome odjeljku pokazali smo kako regularne (invertibilne) matrice možemo karakterizirati pomoću njihove determinante. *Rang matrice* još je jedan konstrukt prikladan za prepoznavanje regularnih matrica i računanje njihovih inverznih matrica. Rang je, međutim, za razliku od determinante, definiran za sve matrice (ne nužno kvadratne), što ga čini jednim od [najvažnijih pojmova linearne algebre](#). Dakle, svakoj se pravokutnoj matrici  $A$  tipa  $m \times n$  može određenim postupkom pridružiti [nenegativni cijeli broj](#), *rang matrice*, koji daje informaciju o [stupnju “degeneriranosti”](#) te matrice. U literaturi ovog udžbenika mogu se pronaći barem tri različite definicije ranga matrice.

[1] Neka je  $A$  proizvoljna pravokutna matrica tipa  $m \times n$ . *Rang*  $r(A)$  matrice  $A$  je red njezine najveće regularne kvadratne podmatrice, odnosno red njezine najveće kvadratne podmatrice kojoj je determinanta različita od nule. Dakle, reći ćemo da proizvoljna pravokutna matrica  $A$  tipa  $m \times n$  ima rang  $r \equiv r(A)$ , ako sadrži kvadratnu podmatricu  $r$ —toga reda determinanta koje je različita od nule i ako je determinanta svake kvadratne podmatrice od  $A$  reda većeg od  $r$  jednaka nuli. Očito je  $r(A) \leq \min\{m, n\}$  čim je matrica  $A$  tipa  $m \times n$ . Za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$ , a za koju je  $r(A) = n$  kažemo da ima *puni rang*.

[2] Također, kažemo da proizvoljna pravokutna matrica  $A$  tipa  $m \times n$  ima rang  $r \equiv r(A)$  [akko](#) sadrži točno  $r$  linearno nezavisnih redaka (stupaca); preostali retci (stupci) su neke njihove linearne kombinacije (rang matrice je (maksimalni) broj linearno nezavisnih redaka (stupaca) te matrice).

**Primjer 3.12** Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Pravokutna matrica  $A$  je tipa  $3 \times 4$  i ima četiri kvadratne podmatrice trećega reda (dobivamo ih ispuštanjem po jednog stupca):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

i [sve](#) one imaju determinantu jednaku nuli (račun ostavljamo čitatelju za vježbu)! Dakle, rang matrice  $A$  [nije](#) 3.

Nadalje, budući postoji [barem jedna](#) kvadratna podmatrica od  $A$  drugoga reda kojoj je determinanta različita od nule (npr. ona u “donjem desnom kutu”), slijedi da je  $r(A) = 2$ .



Nije teško zaključiti kako je vrlo nezgrapno i mukotrpno određivati rang bilo koje matrice po prvoj

definiciji, jer je, u slučaju velikih dimenzija, za tu svrhu potrebno izračunati i suviše mnogo determinanti. Radi važnosti matrice ranga, poželjno je otkriti što jednostavniju tehniku njegova određivanja. Lako se može pokazati kako elementarne transformacije (E1)–(E3) na matrici **ne utječu** na (ne)iščezavanje poddeterminanta, tj. kako elementarne transformacije **ne mijenjaju** rang matrice, pa stoga zaključujemo da **ekvivalentne (slične) matrice imaju isti rang**! Dakle, u svrhu lakšeg određivanja ranga proizvoljne matrice  $A$  preporučljivo je, elementarnim transformacijama **samo nad njezinim retcima**, matricu svesti na njoj ekvivalentnu matricu, kojoj je rang evidentan. Na primjer najjednostavniji ekvivalentan oblik proizvoljne matrice  $A$  je njezin tzv. reducirani oblik, u oznaci  $A_R$ . Na koncu je dovoljno samo baciti pogled na dobivenu matricu  $A_R$  i očitati **broj njezinih ne–nul redaka**. Ovaj postupak je valjan (razuman) jer elementarne transformacije na matrici (zamjena (permutiranje) redaka, skaliranje ili dodavanje bilo kojem retku linearne kombinacije drugih redaka) ne mijenjaju rang, i jer se uklanjanjem iz matrice nekog retka, čiji su svi elementi nule, njezin rang neće promijeniti, pa je nužno:

$$r(A) = r(A_R).$$

**Reducirani oblik (forma) matrice.** Neka je  $A$  proizvoljna kvadratna matrica tipa  $m \times n$ . Kažemo da je matricni element  $a_{ij}$  *stožer (pivot) retka  $i$* , ako je to prvi ne–nul element u tom retku. Stupci matrice  $A$  koji sadrže stožere redaka nazivaju se *stožerni ili pivotni stupci*. Kažemo da je matrica  $A$  u *reduciranom obliku*  $A_R$  ako vrijedi:

- svi nul–retci (ako takvih ima) nalaze se iza ne–nul redaka, odnosno iza onih redaka koji sadrže barem jedan ne–nul element,
- stožer svakog retka je **strogo** desno od stožera prethodnog retka.

Karakteristična (tipična) shema matrice u reduciranom obliku (koji se nerijetko naziva retčana ešalonska forma matrice) prikazana je Slikom 3.4. Može se pokazati kako je svaka matrica  $A$  retčano ekvivalentna **samo jednoj** matrici u reduciranom obliku  $A_R$ . Stoga je:  $r(A) = r(A_R)$ , odnosno vrijedi da je rang proizvoljne matrice  $A$  jednak broju ne–nul redaka u reduciranom obliku matrice  $A_R$ , tj. broju stožernih stupaca.

Nadalje, može se uočiti da će matrica u reduciranom obliku biti regularna **akko** ima puni rang. Dakle, proizvoljna kvadratna matrica  $A$  reda  $n$  je regularna **akko** ima puni rang, tj. ako vrijedi:  $r(A) = n$ . Reducirani oblik takve kvadratne matrice jedinična je matrica!

Za rang matrice još vrijedi:

- (R1)  $r(A) = r(A^T)$  ( $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}$ ),
- (R2)  $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$  ( $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}$ ),
- (R3)  $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$  ( $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}, B \in \mathcal{M}_{n,p}$ ),
- (R4) množenjem proizvoljne pravokutne matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}$  s regularnom matricom (bilo s lijeva, bilo s desna) ne mijenja se njezin rang.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Slika 3.4:** Tipična shema za matricu koja je u reduciranom obliku. Stožeri redaka su zaokruženi.

**Primjer 3.13** Naći reducirani oblik i odrediti rang matrice  $A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Primjenom elementarnih transformacija **samo nad retcima** matrice  $A$  vrijedi:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} \textcircled{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \textcircled{3} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \textcircled{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \textcircled{3} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \\ &\sim \underbrace{\begin{bmatrix} \textcircled{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \textcircled{3} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_R} \Rightarrow r(A) = 3. \end{aligned}$$

### 3.7 Svojstvene vrijednosti i vektori

Premda se svojstvene (ili vlastite) vrijednosti i vektori mogu definirati na razini linearnih operatora (vidi odjeljak 5.4), u praksi se najčešće koriste na razini matrica. Naime, svakom linearnom operatoru u bilo kojem paru baza pripada matrica, pa se problem svojstvenih vrijednosti operatora može reducirati na problem svojstvenih vrijednosti matrica.

**Svojstveni vektor i svojstvena vrijednost.** Kažemo da je  $\lambda \in \mathbb{C}$  *svojstvena vrijednost* kvadratne matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  ako postoji vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  takav da vrijedi:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Za vektor  $\mathbf{x}$  kažemo da je *svojstveni vektor* matrice  $A$  koji pripada svojstvenoj vrijednosti  $\lambda$ . Ako je  $A$  realna kvadratna matrica, svojstveni vektor od  $A$  je netrivialni vektor iz  $\mathbb{R}^n$ , a svojstvena vrijednost skalar iz  $\mathbb{R}$ . Svaka kvadratna matrica  $A \in \mathcal{M}_n$  ima  $n$  (ne nužno različitih) svojstvenih vrijednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Skup  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  naziva se *spektar*, a broj  $\rho(A) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \in \sigma(A)\}$  *spektralni radijus* kvadratne matrice  $A$ . Ako je matrica  $A \in \mathcal{M}_n$  još i simetrična, onda su **sve** njezine svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$ ,  $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ , **realne**! Dodatno, za sve svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$ ,  $i \in [1, n]_{\mathbb{N}}$ , proizvoljne kvadratne matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  vrijedi:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \quad \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

Vidimo kako se po definiciji zahtijeva **netrivijalnost** svojstvenog vektora (svojstveni vektor mora biti različit od nul-vektora), ali svojstvena vrijednost može biti jednaka nuli. Za neke matrice se lako odrede njezine svojstvene vrijednosti i vektori. Npr. ako je  $A$  nul-matrica odnosno jedinična matrica, tada je svaki netrivijalni vektor svojstveni vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti nula odnosno jedan. S druge strane, neke realne matrice nemaju u skupu realnih brojeva svojstvene vrijednosti pa ni svojstvene vektore. Nadalje, neka su  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{x}'$  svojstveni vektori sa istom svojstvenom vrijednošću  $\lambda$ , te neka je  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  proizvoljan. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= A\mathbf{x} + A\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{x}' = \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{x}'), \\ A(\alpha\mathbf{x}) &= \alpha A\mathbf{x} = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Ovo znači da su onda vektori  $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$  i  $\alpha\mathbf{x}$  također svojstveni vektori sa svojstvenom vrijednošću  $\lambda$ . (Skup svojstvenih vektora s istom svojstvenom vrijednošću  $\lambda$  je vektorski prostor.)

Ako su  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  svojstveni vektori koji pripadaju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima  $\lambda$  i  $\mu$ , respektivno, onda  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  **nije** svojstveni vektor, a nije to niti bilo koja linearna kombinacija  $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$  koja zadovoljava uvjet  $\alpha \neq 0$  i  $\beta \neq 0$ . To jamči sljedeći rezultat:

Neka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . Neka su  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  **svojstveni vektori** od  $A$  i  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  **pripadajuće svojstvene vrijednosti**. Ako vrijedi

$$\lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{čim je } i \neq j,$$

onda je skup vektora  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$  **linearno nezavisan** skup. Dodatno, ako kvadratna matrica  $A$  reda  $n$  ima  $n$  **međusobno različitih svojstvenih vrijednosti**, tada postoji baza prostora ( $\mathbb{R}^n$  ili  $\mathbb{C}^n$ ) koja se sastoji od **svojstvenih vektora** matrice  $A$ .

**Karakteristična matrica, karakteristična jednadžba i karakteristični polinom.** Neka je  $\lambda$  proizvoljna svojstvena vrijednost neke realne kvadratne matrice  $A$ . Tada postoji (svojstveni) vektor  $\mathbf{x} \neq 0$ , takav da je  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Zadnja jednadžba se ekvivalentno može napisati u obliku  $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ , odnosno u obliku  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$ . Dakle, matrica  $A - \lambda I$  prebacuje netrivijalni vektor u nul-vektor, pa je singularna. Stoga je njezina determinanta nula,  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Matricu  $C = A - \lambda I$  nazivamo **karakteristična matrica** matrice  $A$ . Determinanta matrice  $C$ ,

$$\det(C) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A),$$

očito je polinom  $n$ -tog stupnja u varijabli  $\lambda$ , s koeficijentima iz  $\mathbb{R}$ ,

$$k_A(\lambda) = k_n \lambda^n + k_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + k_0, \quad k_i \in \mathbb{R}, \quad i \in [0, n]_{\mathbb{Z}},$$

koji nazivamo **karakteristični** ili **svojstveni polinom** matrice  $A$ . Konačno, pripadajuću jednadžbu

$$k_A(\lambda) = 0$$

nazivamo **karakteristična** ili **svojstvena jednadžba** za matricu  $A$ . Vrijednost  $\lambda$  je bila **proizvoljna** svojstvena vrijednost, pa smo pokazali kako je **svaka** svojstvena vrijednost matrice  $A$  nultočka njezinog karakterističnog polinoma. Vrijedi i obrat, odnosno da je **svaka** nultočka karakterističnog polinoma matrice  $A$  svojstvena vrijednost te matrice. Razvijanjem determinante matrice  $C$  lako se uoči da za koeficijente u karakterističnom polinomu matrice  $A$  vrijedi:

$$k_n = (-1)^n, \quad k_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A), \quad k_0 = \det(A).$$

**Primjer 3.14** Odrediti svojstvene vrijednosti matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ -3 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je, za odrediti svojstvene vrijednosti zadane matrice  $A$ , potrebno naći nul-točke njezina karakterističnoga polinoma  $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - A)$ .

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & -3 \\ -2 & \lambda - 2 & -2 \\ -3 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \text{razvoj po 2. stupcu} \\ &= (-1)^{2+2}(\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) [(\lambda - 2)^2 - 9] \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = (\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5 \quad \text{i} \quad \lambda_3 = -1.$$

Karakteristični polinom je **invarijantni** pojam za slične matrice — slične matrice imaju isti karakteristični polinom! Dodatno, ako su  $A$  i  $B$  kvadratne matrice istoga reda, onda matrice  $AB$  i  $BA$  imaju isti karakteristični polinom (dokaz ostavljamo čitatelju za vježbu).

**Hamilton–Cayleyjev<sup>46</sup> teorem.** Svaka kvadratna matrica  $A$  poništava svoj karakteristični polinom, tj. vrijedi:

$$k_A(A) = 0.$$

Na **Hamilton–Cayleyjevom teoremu** temelji se vrlo zanimljiva i jednostavna metoda invertiranja kvadratnih matrica. Naime, može se pokazati kako je matrica  $A \in \mathcal{M}_n$  regularna **akko** je  $k_A(0) \neq 0$  (**akko** broj 0 nije njezina svojstvena vrijednost). Promotrimo sada neku matricu  $A \in \mathcal{M}_n$  i njezin svojstveni polinom  $k_A(\lambda) = \sum_{i=0}^n k_i \lambda^i$ . Očito će matrica  $A$  biti regularna **akko** je  $k_0 \neq 0$ . Tada vrijedi:

$$A^{-1} = -\frac{1}{k_0} \left( \sum_{i=1}^n k_i A^{i-1} \right).$$

Također, često je, koristeći **Hamilton–Cayleyjev teorem**, za neku matricu  $A \in \mathcal{M}_n$ , manjih dimenzija, vrlo jednostavno odrediti njezinu potenciju s velikim eksponentom!

<sup>46</sup> William Rowan Hamilton, irski matematičar i fizičar, 1805.–1865.,  
Arthur Cayley, britanski matematičar 1821.–1895.

**Primjer 3.15** Koristeći **Hamilton–Cayleyjev teorem** izračunati inverznu matricu matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Prvo tražimo karakteristični polinom za matricu  $A$ :

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda^3 - \lambda^2 - 13\lambda + 19).$$

Prema **Hamilton–Cayleyjevom teoremu** je:  $k_A(A) = 0$ , tj.  $A^3 - A^2 - 13A + 19I = 0$ .

Množenjem (s desna) gornje jednakosti s  $A^{-1}$  dobivamo  $A^2 - A - 13I + 19A^{-1} = 0$ , odnosno:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= -\frac{1}{19}(A^2 - A - 13I) \\ &= -\frac{1}{19} \left( \begin{bmatrix} 8 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -4 & 6 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} - 13 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 6 & -7 & 2 \\ -4 & 11 & 5 \\ 7 & -5 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Minimalni polinom i minimalna jednadžba.** Za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A$ , njezin karakteristični polinom **ne mora** biti i polinom najmanjeg stupnja kojeg  $A$  poništava. Neka je  $A$  proizvoljna realna kvadratna matrica reda  $n$ . Neka je  $m_A(\lambda)$  ne-nul polinom **najmanjeg** stupnja u varijabli  $\lambda$ , s koeficijentima iz  $\mathbb{R}$ , koji matrica  $A$  poništava, tj. za koji vrijedi:

$$m_A(A) = 0.$$

Onda kažemo da je  $m_A$  jedan *minimalni polinom* za matricu  $A$ , a pripadajuću jednadžbu:

$$m_A(\lambda) = 0$$

nazivamo *minimalna jednadžba* matrice  $A$ . Nadalje, za svaki skalar  $\alpha \neq 0$ , očito je i  $\alpha m_A(\lambda)$  minimalni polinom za matricu  $A$ .

Kako prema **Hamilton–Cayleyjevom teoremu** svaka kvadratna matrica  $A$  poništava svoj karakteristični polinom, to stupanj njezinog minimalnog polinoma **nije** veći od reda  $n$  te matrice! Ako je npr.  $A = \alpha I_n$ , onda je  $k_A(\lambda) = (\alpha - \lambda)^n$ , a  $m_A(\lambda) = \alpha - \lambda$ . Minimalni polinom je još jedan **invarijantni** pojam za slične matrice — slične matrice imaju iste minimalne polinome!

Dodatno, karakteristični polinom kvadratne matrice, ali i svaki drugi polinom koji poništava tu matricu, **djeljiv je** (bez ostatka) s njezinim minimalnim polinomom (nul-točke minimalnoga polinoma ujedno su i nul-točke karakterističnoga polinoma). Pomnija analiza pokazuje kako je svaka svojstvena vrijednost proizvoljne kvadratne matrice nul-točka njezina minimalnoga polinoma!

Postoji više načina za računanje minimalnoga polinoma (svaka kvadratna matrica  $A$  ima ovaj polinom štoviše, on je **jedinstven** do na multiplikativnu konstantu). Algoritam koji se može lako opisati za sve kvadratne matrice  $A$  reda  $n$  (jamči ga **Hamilton–Cayleyjev teorem**) je sljedeći:

**[K1]** Ispitujemo postojanje skalara (koeficijenta)  $k_0$  koji bi **identički zadovoljio** jednadžbu  $A = -k_0 I$ .

**[K2]** Ako takav skalar postoji, **zaustavljamo** algoritam, i vrijedi:  $m_A(\lambda) = k_0 + \lambda$ .

**[K3]** Ako takav skalar **NE** postoji, **računamo** matricu  $A^2$ , te ispitujemo postojanje skalara  $k_0$  i  $k_1$  koji bi **identički zadovoljili** jednadžbu  $A^2 = -k_0 I - k_1 A$ .

**[K4]** Ako takvi skalari postoje, **zaustavljamo** algoritam, i vrijedi:  $m_A(\lambda) = k_0 + k_1 \lambda + \lambda^2$ .

**[K5]** Ako takvi skalari **NE** postoje, algoritam **nastavljamo** računanjem matrice  $A^3$ , te ispitivanjem postojanja skalara  $k_0$ ,  $k_1$  i  $k_2$  koji bi **identički zadovoljavali** jednadžbu  $A^3 = -k_0 I - k_1 A - k_2 A^2$ .

**[K6]** Ako takvi skalari postoje, **zaustavljamo** algoritam, i vrijedi:  
 $m_A(\lambda) = k_0 + k_1 \lambda + k_2 \lambda^2 + \lambda^3$ .

**[K7]** Ako takvi skalari **NE** postoje, algoritam **nastavljamo** sličnim koracima, dok ne nađemo minimalni polinom (stupanj minimalnog polinoma neke kvadratne matrice **nije** veći od reda  $n$  te matrice).

Ne baš tako kratak uvod u matrice i determinante završit će jednostavnim primjerom određivanja minimalnoga polinoma jedne kvadratne matrice malih dimenzija.

**Primjer 3.16** Odrediti minimalni polinom matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Prvo ispitujemo postojanje skalara (koeficijenta)  $k_0$  koji bi identički zadovoljavao jednadžbu  $A = -k_0 I$ , odnosno:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -k_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nije teško zaključiti kako takav skalar **ne postoji**, pa stoga računamo  $A^2$ , i zatim ispitujemo postojanje skalara  $k_0$  i  $k_1$  koji bi identički zadovoljavali jednadžbu  $A^2 = -k_0 I - k_1 A$ .

Lako je pokazati kako će  $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix} = -k_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  biti identički zadovoljena

**samo** za  $k_0 = 7$  i  $k_1 = -5$ . Dakle, minimalni polinom zadane matrice  $A$  je:

$$m_A(\lambda) = 7 - 5\lambda + \lambda^2.$$



### 3.8 Zadaci

**Zadatak 3.1** Zadane su matrice  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Naći:

- a)  $A + B$ ;    b)  $2A - 3B$ ;    c)  $AB$ ;    d)  $BA$ ;    e)  $AB - BA$ .

**Rješenje.**

$$\text{a) } A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } 2A - 3B = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & -7 \end{bmatrix};$$

$$\text{c) } AB = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix};$$

$$\text{d) } BA = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 8 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\text{e) } AB - BA = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.2** Izračunati:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 3];$$

$$\text{d) } [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } [13]; \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 23 & -34 & 29 \\ 24 & -42 & 32 \\ 58 & 28 & 56 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.3** Izračunati:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^2; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^4; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.4** Odrediti sve matrice koje komutiraju (s obzirom na množenje) s danom matricom:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezultate provjeriti!

**Rješenje.**

$$\text{a) } \begin{bmatrix} d-2c & -2c \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}; \text{ b) } \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 3i-g-3a & e & 0 \\ g & i-3b-e & i \end{bmatrix}, a, b, e, g, i \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 3.5** Ako se zna da je  $A \cdot A^{-1} = I$ , naći inverznu matricu sljedećih matrica:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}; \quad \text{c) } A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Zadatak 3.6} \text{ Zadana je matrica } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & c & -c \\ -1 & -c & 2c \end{bmatrix}.$$

a) Za koje vrijednosti parametra  $c \in \mathbb{R}$  je matrica  $A$  **regularna**?b) Izračunati  $A^{-1}$  za najmanju pozitivnu cjelobrojnu vrijednost  $c \in \mathbb{N}$  za koju  $A^{-1}$  postoji.**Rješenje.**a) Matrica  $A$  je **regularna** za sve  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ;

$$\text{b) Za } c = 2 \text{ je } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Zadatak 3.7} \text{ Izračunati } f(A) \text{ ako je } f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \text{ i } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5I = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.8** Odrediti rang matrice:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**a)  $r(A) = 3$ ;b)  $r(B) = 3$ .

**Zadatak 3.9** Ispitati rang matrice  $A$  u ovisnosti od parametra  $a \in \mathbb{R}$ :

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 3a-2 \\ 1 & a & 1 & 2-2a \\ 0 & 1 & a & -2-a \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } r(A) = 3, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{2}\}; \quad r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 0, a = \sqrt{2} \text{ i } a = -\sqrt{2};$$

$$\text{b) } r(A) = 3, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}; \quad r(A) = 2 \Leftrightarrow a = 3.$$

**Zadatak 3.10** Dokazati matematičkom indukcijom:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -5 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 6n+1 & 4n \\ -9n & 1-6n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & 1-2n \end{bmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Zadatak 3.11** Riješiti matrice jednadžbe:

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X &= \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; & \text{b) } X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot X &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}; & \text{d) } X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -13 & 0 \\ -10 & -19 \end{bmatrix}; \\ \text{e) } \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}; & \text{f) } \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Rješenje.**

$$\begin{aligned} \text{a) } X &= \begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}; & \text{b) } X &= \emptyset; & \text{c) } X &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \\ \text{d) } X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}; & \text{e) } X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; & \text{f) } X &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Zadatak 3.12** Riješiti matrice jednadžbe:

$$\text{a) } (A - 2I) \cdot X = A + I, \quad \text{b) } X \cdot (A - 2I) = A + I, \quad \text{ako je} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } X = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.13** Odrediti sve matrice koje komutiraju (s obzirom na množenje) s matricom:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a+c \end{bmatrix}, \quad a, c \in \mathbb{R}; \quad \text{b) } Y = \begin{bmatrix} -2c+d & -2c \\ c & d \end{bmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 3.14** Odrediti karakteristični polinom i svojstvene vrijednosti matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$k_A(\lambda) = 3\lambda^2 - \lambda^3 - 3\lambda + 1; \quad \lambda_{1,2,3} = 1.$$

**Zadatak 3.15** Odrediti svojstvene vrijednosti matrice  $C$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = AB.$$

**Rješenje.**

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -4.$$

**Zadatak 3.16** Diskutirati rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}$$

u ovisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Rješenje.**

Za  $\lambda = 0$  ili  $\lambda = -2$  je  $r(A) = 2$ , za  $\lambda = 1$  je  $r(A) = 1$ , inače je  $r(A) = 3$ .

**Zadatak 3.17** Izračunati:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}; & \text{b)} & \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}; & \text{c)} & \begin{vmatrix} a-b & -2 \\ ab & a-b \end{vmatrix}; & \text{d)} & \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}; \\ \text{e)} & \begin{vmatrix} \tan \varphi & -1 \\ 1 & \cot \varphi \end{vmatrix}; & \text{f)} & \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix}; & \text{g)} & \begin{vmatrix} 2i & -i \\ i & 3i \end{vmatrix}; & \text{h)} & \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Rješenje.**

$$\text{a)} 19; \quad \text{b)} 0; \quad \text{c)} } a^2 + b^2; \quad \text{d)} 0; \quad \text{e)} 2; \quad \text{f)} 1; \quad \text{g)} -7; \quad \text{h)} 0.$$

**Zadatak 3.18** Izračunati vrijednosti determinanti:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}; & \text{b)} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}; & \text{c)} & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \\ \text{d)} & \begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & a \end{vmatrix}; & \text{e)} & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Rješenje.**a) 5; b) 48; c) 21; d) 0; e)  $-1 + i$ .**Zadatak 3.19** Provjeriti:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = (b-a)^3(3a+b); \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -90.$$

**Zadatak 3.20** Riješiti jednadžbe:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 8 & x+3 \\ x+2 & 6 & 3 \\ 1 & 2x & x \end{vmatrix} = 0.$$

**Rješenje.**a)  $x_1 = 2, x_2 = 3$ ;b)  $x_1 = -3, x_{2,3} = 1$ .**Zadatak 3.21** Riješiti jednadžbe:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \sin x & \cos x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) & \cos x & \sin x \\ 1 & a & 1-a \end{vmatrix} = 0; \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

**Rješenje.**a)  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ;b)  $x_1 = 1, x_2 = 3$ .**Zadatak 3.22** Izračunati

$$D = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$$

ako  $z$  zadovoljava jednadžbu:

$$z^5 = 1.$$

**Rješenje.** $D = 4$ , ako je  $z = 1$  (trivijalni peti korijen jedinice),  $D = -1$ , ako je  $z \neq 1$  uz uvjet  $z^5 = 1$ .**Zadatak 3.23** Dokazati sljedeća svojstva za trag kvadratne matrice:**(Tr1)**  $\text{tr}(A+B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ ,**(Tr2)**  $\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$ ,**(Tr3)**  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ ,**(Tr4)**  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Zadatak 3.24** Riješiti matricnu jednadžbu  $A(XA + B) = 2AB$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & 11 \\ -1 & 16 & 23 \\ -1 & 25 & 35 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.25** Riješiti matricnu jednadžbu  $(X^{-1} + A)B = A(B + I)$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 24 & 8 & 2 \\ 30 & -6 & 3 \\ 6 & -22 & 17 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.26** Riješiti matricnu jednadžbu  $(AB + XA)B^{-1} = I + A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 10 & -5 & 9 \\ 22 & 22 & -22 \\ 16 & 47 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.27** Naći matricu  $X$  koja zadovoljava jednadžbu  $AX^{-1} = A - X^{-1}$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.28** Riješiti matricnu jednadžbu  $A(X - B)^{-1} = C$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 3 \\ -6 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odrediti rang matrice  $X$ .

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r(X) = 2.$$

**Zadatak 3.29** Naći matricu  $X$  iz matrice jednadžbe  $BX - A(B - I) = A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{19} \begin{bmatrix} 30 & 7 & -53 \\ 7 & 20 & 63 \\ 5 & 17 & -31 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.30** Riješiti matricnu jednadžbu  $(I + X^{-1})A = B + A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.31** Riješiti matricnu jednadžbu  $(XA - I)B = (B - I)B$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & 0 \\ -12 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -18 & 6 & 10 \\ -61 & 3 & 25 \\ 83 & -13 & -31 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.32** Riješiti matricnu jednadžbu  $A(X^{-1} - I) = B - A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -6 & -3 & 3 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.33** Riješiti matricnu jednadžbu  $AXB = C$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Odrediti rang matrice  $X$ .

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad r(X) = 2.$$

**Zadatak 3.34** Riješiti matricnu jednadžbu  $AB^{-1}X = I$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.35** Riješiti matricnu jednadžbu  $(X - I)A = B - A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.36** Riješiti matricnu jednadžbu  $(BX - I)A = B^2 - A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} -6 & 5 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.37** Riješiti matricnu jednadžbu  $B(I + BX) = BA + B$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 14 & 12 & -2 \\ 7 & 16 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.38** Riješiti matricnu jednadžbu  $B(I + X)A = A^2 + BA$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 3 & 14 & 6 \\ -6 & 1 & -3 \\ 9 & -8 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.39** Naći matricu  $X$  iz jednadžbe  $AX - A = 2X + I$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.40** Riješiti matricnu jednadžbu  $(AX^{-1} - B + I)A = A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 9 & -5 & 5 \\ 9 & 1 & -1 \\ -9 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.41** Riješiti matricnu jednadžbu  $XA^{-1} = B^{-1}$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.42** Zadana je matrica  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ . Odrediti svojstvene vrijednosti za matricu  $A$ , te svojstvene vektore koji pripadaju najmanjoj svojstvenoj vrijednosti.

**Rješenje.**

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 2, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.43** Zadana je matrica  $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ . Odrediti svojstvene vrijednosti matrice  $A$ , te svojstvene vektore za njezinu najveću svojstvenu vrijednost.

**Rješenje.**

$$\lambda_1 = 16, \quad \lambda_2 = -2, \quad \lambda_3 = 0, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.44** Vektor  $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  jedan je svojstveni vektor matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ . Odrediti pripadajuću svojstvenu vrijednost, kao i ostale svojstvene vrijednosti matrice  $A$ , te njihove svojstvene vektore.

**Rješenje.**

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.45** Pokazati da matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  poništava svoj karakteristični polinom.

**Rješenje.**

$$k_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1), \quad k_A(A) = 0.$$

**Zadatak 3.46** Pokazati da matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  poništava svoj karakteristični polinom.

**Rješenje.**

$$k_A(\lambda) = \lambda^2(1 - \lambda), \quad k_A(A) = 0.$$

**Zadatak 3.47** Naći reducirani oblik i odrediti rang matrice  $A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$A \sim \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{3} & \frac{32}{3} \end{bmatrix}}_{A_R}, \quad r(A) = 4.$$

**Zadatak 3.48** Odrediti determinantu i rang **transponirane matrice** za matricu  $A$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & -12 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$|A^T| = \det(A^T) = 0, \quad r(A^T) = 3.$$

**Zadatak 3.49** Za matricu  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  pokazati da je **regularna**, i zatim odrediti njezinu inverznu matricu  $A^{-1}$ .

**Rješenje.**

$$A \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad r(A) = 4, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.50** Odrediti, ako postoji, inverz matrice  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ .

**Rješenje.**

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & -1 \\ 12 & -9 & 28 & 8 \\ -8 & 6 & -19 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.51** Za matricu  $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -16 & -2 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$  naći rang, i zatim odrediti njezinu inverznu matricu  $A^{-1}$ .

**Rješenje.**

$$A \sim \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad r(A) = 4, \quad A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.52** Odrediti determinantu matrice  $A^2$ , ako je:

a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix};$       b)  $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

**Rješenje.**

a)  $|A^2| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 10 & 10 \\ -7 & -8 & -3 \end{vmatrix} = 4;$       b)  $|A^2| = \begin{vmatrix} 27 & 22 & 5 & 24 \\ -21 & 24 & 9 & -6 \\ -14 & 11 & 10 & -4 \\ -7 & 10 & 29 & 22 \end{vmatrix} = 101124.$

**Zadatak 3.53** Odrediti nepoznanicu  $x$  za koju vrijedi:  $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ x & x-2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$

**Rješenje.**

$$x = 5.$$

**Zadatak 3.54** Riješiti matričnu jednadžbu  $A \cdot B - I = X \cdot C$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} -15 & 6 \\ -89 & 34 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.55** Riješiti matričnu jednadžbu  $A \cdot X + B = C$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & -6 \\ -3 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 15 & 17 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.56** Riješiti matričnu jednadžbu:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 3.57** Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**Svojstveni vektori matrice  $A$  su:

- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_1 = 1$ ;
- $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_2 = 2$ ;
- $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_3 = 2$ .

**Zadatak 3.58** Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**Svojstveni vektori matrice  $A$  su:

- $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_1 = 3$ ;
- $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_2 = 3$ ;
- $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_3 = 2$ .

**Zadatak 3.59** Izračunati obujam paralelopipeda razapetog svojstvenim vektorima matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Svojstveni vektori matrice  $A$  su:

- $\mathbf{v}_1 = [-1 \ -1 \ 1]^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_1 = 2$ ;
- $\mathbf{v}_2 = [0 \ -1 \ 1]^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_2 = 3$ ;
- $\mathbf{v}_3 = [0 \ 0 \ 1]^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_3 = 4$ .

Obujam paralelopipeda razapetog svojstvenim vektorima  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , i  $\mathbf{v}_3$  je:

$$V = |(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3| = 1.$$

**Zadatak 3.60** Odrediti kutove između svojstvenih vektora matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Svojstveni vektori matrice  $A$  su:

- $\mathbf{v}_1 = [-1 \ -2 \ 1]^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_1 = -1$ ;
- $\mathbf{v}_2 = [-2 \ 1 \ 0]^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_2 = 5$ ;
- $\mathbf{v}_3 = [1 \ 0 \ 1]^T$ , za pripadajuću svojstvenu vrijednost  $\lambda_3 = 5$ .

Kutovi između svojstvenih vektora  $\mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{v}_2$ , i  $\mathbf{v}_3$  su:

$$\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 90^\circ, \quad \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) = 90^\circ, \quad \text{i} \quad \angle(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \approx 129,23^\circ.$$

**Zadatak 3.61** Odrediti minimalni polinom matrice  $X$ , ako je  $X$  rješenje matrične jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad m_X(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 4.$$

**Zadatak 3.62** Odrediti  $A^{1000}$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

$$A^{1000} = 2^{998} A^2.$$

**Zadatak 3.63** Odrediti parametar  $a \in \mathbb{R}^+$  za koji je  $\det(A) = -1$ , ako je:

$$A = \begin{bmatrix} -a & a-8 \\ a+3 & a \end{bmatrix}.$$

Zatim, za izračunatu vrijednost parametra  $a$ , naći inverz matrice  $(A^{2025})^T$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $a = 5$ ,  $((A^{2025})^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ .

**Zadatak 3.64** Za  $n \in \{3, 4, 5\}$ , naći inverze Hilbertove<sup>47</sup> matrice  $H_n$ , simetrične kvadratne matrice reda  $n$ , definirane s:  $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$  ( $\forall i, j$ ).

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$H_3^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix},$$

$$H_4^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 1200 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{bmatrix},$$

$$H_5^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & -300 & 1050 & -1400 & 630 \\ -300 & 4800 & -18900 & 26880 & -12600 \\ 1050 & -18900 & 79380 & -117600 & 56700 \\ -1400 & 26880 & -117600 & 179200 & -88200 \\ 630 & -12600 & 56700 & -88200 & 44100 \end{bmatrix}.$$

Vidimo kako su elementi inverza cijeli brojevi te da su na glavnoj dijagonali svi pozitivni. Dijagonale paralelne njoj su naizmjenice cijele negativne i cijele pozitivne.

**Zadatak 3.65** Fibonaccijev niz je niz cijelih brojeva u kojem je svaki član (osim prva dva) jednak zbroju prethodna dva člana. Formalno, niz se definira rekursivno ovako:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1,$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{za } n \geq 2.$$

Dokazati da vrijedi:

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix},$$

ako je

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix}.$$

<sup>47</sup> David Hilbert, njemački matematičar, 1862.–1943.

**Zadatak 3.66** Neka je zadan skup funkcija  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Pretpostavimo da ove funkcije imaju derivacije na intervalu  $I$  barem do zaključno reda  $n - 1$ . Funkcija definirana kao:

$$W(x) = W(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(x) & \varphi_2^{(n-2)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(x) \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

je determinanta Wronskog<sup>48</sup> (tzv. Wronskijan).

Izračunaj Wronskijan ovih triju polinomskih funkcija:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + x, \\ g(x) &= 1 + x^2, \\ h(x) &= 1 + x^3. \end{aligned}$$

**Rješenje.**

Za zadane polinomske funkcije vrijedi:

$$W(f(x), g(x), h(x)) = \begin{vmatrix} 1+x & 1+x^2 & 1+x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = \dots = 2x^3 + 6x^2 - 6x + 2.$$

**Napomena:** Budući da dobiveni Wronskijan<sup>49</sup> **nije identički jednak nuli** za sve  $x \in \mathbb{R}$ , prema teoriji diferencijalnih jednadžbi možemo zaključiti da je ovaj skup polinomskih funkcija **linearno nezavisan** na cijelom skupu realnih brojeva.



<sup>48</sup> Józef Maria Hoëné-Wroński (ili Wroński), poljski filozof i matematičar, 1776.–1853.

<sup>49</sup> Ako su funkcije  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ , koje su barem  $n - 1$  puta derivabilne, linearno zavisne na intervalu  $I$ , onda je njihov Wronskijan identično jednak nuli. Wronskijan može biti nula iako su funkcije linearno nezavisne.



## 4. Linearni sustavi

### 4.1 Osnovni pojmovi o linearnim sustavima

**Opći oblik linearnog sustava.** Opći oblik linearnog sustava  $m$  jednadžbi s  $n$  nepoznanica,  $m, n \in \mathbb{N}$ , je:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (4.1)$$

pri čemu skalare  $a_{ij}$  za  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  i  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  nazivamo *koficijentima jednadžbi*, skalare  $b_i$  za  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  *slobodnim članovima*, a  $x_j$  za  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  *nepoznanicama*.

**Rješenje** ovog sustava je *svaka*  $n$ -torka  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  koja uvrštena u (4.1) identički zadovoljava *sve* jednadžbe. Linearni sustav može imati **jedinstveno rješenje** (*određen sustav*), može biti **bez ijednog rješenja** (*nemoguć, proturječan ili kontradiktoran, odnosno, inkompatibilan sustav*), ali može imati i **beskonačno mnogo rješenja** (*neodređen sustav*).

Očito je kako se linearni sustav (4.1) može kraće zapisati kao

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (4.2)$$

što nas motivira za uvođenje matričnog zapisa sustava (4.1), tj. da se taj sustav može napisati u obliku matrične jednadžbe

$$AX = B, \quad (4.3)$$

gdje smo označili:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Matrica  $A$  naziva se (*osnovna*) *matrica (koficijenata) sustava*, vektor  $X$  je *vektor nepoznanica*, a vektor  $B$  *desna strana sustava* ili *vektor slobodnih članova (koficijenata)*.

## 4.2 Rješavanje općenitog linearnog sustava

**Kronecker–Capellijev<sup>50</sup> teorem.** Premda je problem rješavanja linearnih sustava najvažniji problem linearne algebre, nije teško vidjeti da se rješenje tih sustava **ne mijenja** ako izvršimo bilo koju (ili konačno mnogo njih) od sljedećih radnji (operacija):

- [i] neku jednadžbu linearnog sustava pomnožimo s brojem različitim od nule,
- [ii] zamijenimo bilo koje dvije jednadžbe u linearnome sustavu,
- [iii] neku jednadžbu linearnog sustava pribrojimo drugoj,
- [iv] zamijenimo redoslijed bilo koje dvije nepoznanice (varijable) u zapisu linearnog sustava.

Također, lako je uvidjeti kako ove radnje odgovaraju sljedećim radnjama na *proširenoj matrici sustava*<sup>51</sup>, u oznaci  $A_P = [A \mid B]$ :

- [i] neki redak ove matrice pomnožimo s brojem različitim od nule,
- [ii] zamijenimo bilo koja dva retka ove matrice,
- [iii] neki redak ove matrice pribrojimo drugome,
- [iv] zamijenimo bilo koja dva stupca u matrici koeficijenata sustava.

Za linearne sustave koji imaju ekvivalentne (slične) proširene matrice sustava kažemo da su *ekvivalentni*<sup>52</sup>, dok sustave linearnih jednadžbi kojima je proširena matrica u reduciranoj formi zovemo *reduciranim* linearnim sustavima. Lako se vidi kako **ekvivalentni** linearni sustavi imaju **isto** rješenje, te kako je **reducirani** linearni sustav **najpogodnija** ekvivalentna forma originalnog linearnog sustava (proizvoljni linearni sustav ima isto rješenje kao njemu ekvivalentan reducirani sustav).

Ugrubo, čin (postupak) rješavanja općenitog linearnog sustava (4.1) svodi se na operacije s elementima matrice  $A$  i vektora  $B$ , odnosno s elementima matrice  $[A \mid B]$ . Nadalje, problem egzistencije i jedinstvenosti rješenja ovisi uglavnom o svojstvima matrice sustava, a precizno je određen **Kronecker–Capellijevim teoremom** koji pak opisuje strukturu rješenja sustava linearnih jednadžbi u ovisnosti o rang u matrice sustava i rang u proširene matrice sustava. Prema ovome teoremu za linearni sustav (4.3) vrijedi:

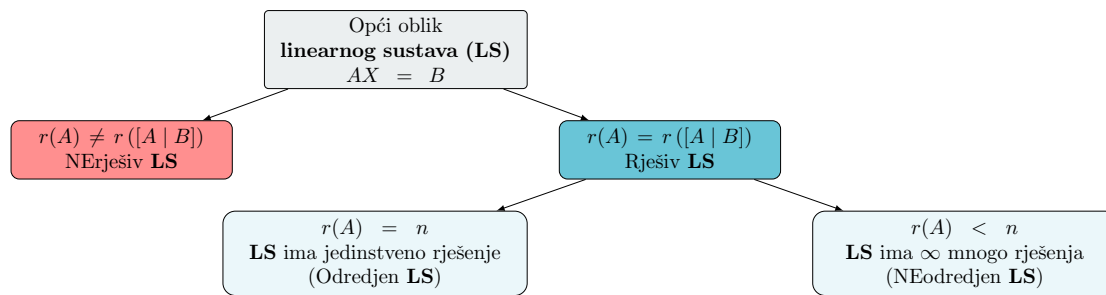
- (KC1) linearni sustav ima rješenje **onda i samo onda** kad je rang matrice sustava  $A$  jednak rang u proširene matrice sustava  $[A \mid B]$ , tj. ako vrijedi  $r(A) = r([A \mid B])$ ;
- (KC2) ako je  $r(A) = r([A \mid B])$ , tada linearni sustav ima **ista rješenja** kao i sustav koji dobivamo kada uzmemo  $r(A)$  linearno nezavisnih jednadžbi, odnosno  $r(A)$  linearno nezavisnih redaka matrice  $[A \mid B]$ ;
- (KC3) ako linearni sustav ima rješenje i ako je  $n$  broj nepoznanica u tom sustavu, tada je rješenje **jedinstveno** (određen sustav) **akko** je  $r(A) = n$ . Ako je  $r(A) < n$ , tada sustav ima **beskonačno mnogo rješenja** (neodređen sustav) koja su izražena pomoću  $n - r(A)$  parametara.

Dodatno, pomnija analiza pokazuje da ako linearni sustav (u općem obliku) ima rješenja ( $r(A) = r([A \mid B])$ ) i ako su stupci  $S_1, S_2, \dots, S_n$  matrice sustava  $A$  linearno nezavisni, onda se desna strana, odnosno vektor  $B$ , može napisati kao **linearna kombinacija** stupaca matrice  $A$  i to na **jedinstven** način! U tom slučaju koeficijenti linearne kombinacije čine rješenje  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  linearnog sustava i to **jedinstveno**!! Inače su, stupci (retci) kvadratne matrice  $A \in \mathcal{M}_n$  linearno nezavisni **akko** je  $\det(A) \neq 0$ .

<sup>50</sup> Alfredo Capelli, talijanski matematičar, 1855.–1910.

<sup>51</sup> Matrica koja se dobiva proširenjem matrice sustava  $A$  za vektor desne strane  $B$ .

<sup>52</sup> Pažljiv čitatelj će zamijetiti kako dva linearna sustava koja su ekvivalentna, **ne moraju** imati isti broj jednadžbi, ali je skup svih rješenja jednog od njih jednak skupu svih rješenja drugog.



Slika 4.1: Struktura skupa svih rješenja linearnog sustava prema **Kronecker–Capellijevu teoremu**.

Nadalje, ako desna strana linearnog sustava (u općem obliku) **linearno zavisi** od stupaca  $S_1, S_2, \dots, S_n$  matrice sustava  $A$ , i ako su stupci matrice  $A$  linearno nezavisni, onda se desna strana može na **više načina** prikazati kao **linearna kombinacija** stupaca matrice  $A$ .

**Primjer 4.1** Riješiti linearni sustav  $AX = B$ , ako su:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
 [A \mid B] &= \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 2 & -4 & 4 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & -2 & 3 & 6 \\ 5 & -4 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 4R_1 \\ R_4 - 5R_1 \end{array} \right\} \\
 &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 2 & 15 & 14 \\ 0 & -14 & 8 & 16 & 9 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} R_3 - \frac{3}{4}R_2 \\ R_4 - \frac{7}{4}R_2 \end{array} \right\} \\
 &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{57}{4} & \frac{65}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{57}{4} & \frac{57}{4} \end{array} \right] \sim \{R_4 - R_3\} \\
 &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -8 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{57}{4} & \frac{65}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Vidimo da je  $r(A) = 3 < 4 = r([A \mid B])$ , pa linearni sustav  $AX = B$  **nema** rješenja. ■

**Gaussova metoda eliminacije.** Prethodne primjedbe i algoritam pokazan u naknadnom primjeru sadržani se u osnovi *Gaussove metode eliminacije*. Ovaj postupak se sastoji u tome, da se općeniti linearni sustav (4.1) **konačnim brojem** elementarnih transformacija svodi na linearni sustav koji mu je ekvivalentan, ali što jednostavniji, tako da mu rješenja budu lako dohvatljiva, tj. iz kojega ćemo brzo moći odrediti njegovo rješenje. Na primjer, jedan takav linearni sustav je onaj u kojem se u drugoj jednadžbi **ne pojavljuje** nepoznanica  $x_1$ , u trećoj nepoznanice  $x_1$  i  $x_2$ , itd., u zadnjoj jednadžbi se **pojavljuje samo jedna nepoznanica** (ona s najvećim indeksom). Metoda koja svodi polazni općeniti linearni sustav na takav linearni sustav, korištenjem konačnog broja istih onih elementarnih transformacija (radnji) kao i pri određivanju reducirane forme matrice, zove se *Gaussova metoda eliminacija*. Ugrubo, ideja Gaussove metode eliminacije se sastoji u tome da se pomoću konačnog broja elementarnih transformacija samo nad retcima proširene matrice  $[A \mid B]$  izbace (uklone) nepoznanice koje se nalaze ispod “glavne dijagonale”. U literaturi ovog udžbenika može se pronaći i korisna generalizacija Gaussove metode eliminacije, tzv. *Gauss–Jordanova*<sup>53</sup> *metoda eliminacije*. Kod ovog postupka (svaka) nepoznanica  $x_k$  se **eliminira iz svih** jednadžbi linearnog sustava (4.1) **osim** iz  $k$ -te jednadžbe. Dakle, u slučaju da imamo kvadratni regularni linearni sustav ( $m = n$  i  $\det(A) \neq 0$ ), elementarnim transformacijama nad (njezinim) retcima, proširenu matricu sustava  $[A \mid B]$  svodimo na ekvivalentnu matricu  $[I \mid B']$ , gdje je  $I$  jedinična matrica. U ovom slučaju, rješenja sustava navedena su u stupčanoj matrici  $B'$ .

Prema definiciji ekvivalentnih linearnih sustava znamo kako ovi sustavi imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja, tj. **svako rješenje** prvog linearnog sustava ujedno je i rješenje drugog linearnog sustava, i obratno, svako rješenje drugog sustava je i rješenje prvog. Dakle, ako je  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  rješenje općenitog linearnog sustava (4.1), tad je očito ta  $n$ -torka rješenje i sustava dobivenog Gaussovom ili Gauss–Jordanovim eliminacijama njegovih nepoznanica. Ukratko, efikasan postupak rješavanja općenitog linearnog sustava (4.1) ili (4.3) Gaussovom metodom eliminacije sastoji se od sljedećih koraka:

- [K1]** **Gaussovom eliminacijom** nepoznanica, odnosno njima odgovarajućih matričnih koeficijenata u proširenoj matrici sustava, zadani linearni sustav se svodi na njemu ekvivalentan reducirani sustav.
- [K2]** Primjenom **Kronecker–Capellijeva teorema** diskutira se postojanje i karakter rješenja reduciranog sustava.
- [K3]** Efektivno se pronalazi rješenje reduciranog sustava rješavanjem od zadnje jednadžbe prema prvoj.

**Algoritam Gaussove metode eliminacije.** Slijedi ne tako sažet opis algoritma Gaussove metode eliminacije, kojeg smijemo smatrati **univerzalnim algoritmom** za rješavanje proizvoljnog sustava linearnih jednadžbi. Neka je zadan linearni sustav oblika (4.1). Premjestimo jednadžbe u linearnom sustavu, ako je potrebno, tako da koeficijent uz  $x_1$  u prvoj jednadžbi bude različit od nule. Zatim prvu jednadžbu podijelimo s koeficijentom uz  $x_1$ , pomnožimo brojem koji je suprotan koeficijentu uz  $x_1$  u drugoj jednadžbi, i pribrojimo (dodamo) je drugoj jednadžbi, zatim prvu jednadžbu podijelimo s koeficijentom uz  $x_1$ , pomnožimo brojem koji je suprotan koeficijentu uz  $x_1$  u trećoj jednadžbi, i pribrojimo je trećoj jednadžbi, zatim prvu jednadžbu podijelimo s koeficijentom uz  $x_1$ , pomnožimo brojem koji je suprotan koeficijentu uz  $x_1$  u četvrtoj jednadžbi, i pribrojimo je četvrtoj jednadžbi, i tako dalje. Na taj način smo **izbacili** (uklonili ili eliminirali) nepoznanicu  $x_1$  iz druge, treće,

<sup>53</sup> Wilhelm Jordan, njemački geodet i matematičar, 1842.–1899.

$\dots, m$ -te jednadžbe i došli do ekvivalentnog sustava oblika:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ &\vdots \\ a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n &= b'_m. \end{aligned}$$

Pritom je:

$$\begin{aligned} a'_{22} &= a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}, \quad a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}, \dots, \quad a'_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n}, \\ b'_2 &= b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1, \quad b'_3 = b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1, \dots, \quad b'_m = b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1, \end{aligned}$$

odnosno općenito:

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1k}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \quad \text{za } i = 2, 3, \dots, m \text{ i } k = 2, 3, \dots, n.$$

Sad učinimo isto s podsustavom, koji se sastoji od druge, treće,  $\dots, m$ -te jednadžbe u odnosu na nepoznanicu  $x_2$ . Time iz treće i daljnjih jednadžbi eliminiramo nepoznanicu  $x_2$ . Zatim na isti način iz četvrte i daljnjih jednadžbi izbacimo nepoznanicu  $x_3$ , i tako dalje. Budući da sustav ima konačno mnogo jednadžbi, postupak **staje** nakon konačno koraka. Dobiva se ekvivalentan linearni sustav, po obliku “stepenast” (u posebnom slučaju kvadratnog nesusingularnog sustava — “trokutast”). Sada, u slučaju da ne dobijemo nemoguć ili neodređen sustav, vršimo postupne supstitucije “odozdo”, odnosno provodimo **supstituciju unatrag** za rješenje  $X$  — najprije riješimo posljednju jednadžbu, njezino rješenje uvrstimo u pretposljednju jednadžbu, pa nju riješimo, pa dobivena rješenja uvrstimo u treću jednadžbu straga i tako dalje sve do prve jednadžbe. Očito je algoritam Gaussove metode eliminacije prikladan i za primjenu računala (za pseudokod ovog algoritma vidi Algoritam 1). Računska složenost ovog algoritma, za kvadratni sustav ( $m = n$ ) ima asimptotski red veličine  $O(n^3)$ .

---

**Algoritam 1** Pseudokod algoritma Gaussove metode eliminacije

---

**Require:** Matrica  $A$  ( $m \times n$ ) i vektor  $B$  sustava  $AX = B$

**Ensure:** Rješenje  $X$  ili obavijest o prirodi sustava

```

1: function GAUSSIAN_ELIMINATION( $A, B$ )
2:    $m \leftarrow \text{broj redaka}(A)$ ;  $n \leftarrow \text{broj stupaca}(A)$ 
3:   for  $k = 1$  to  $\min(m, n) - 1$  do
4:     Nađi  $p \geq k$  s najvećim  $|a_{p,k}|$ ; zamijeni retke  $p, k$  u  $A, B$ ; ako je  $a_{k,k} = 0$ , stani
5:     for  $i = k + 1$  to  $m$  do
6:        $m_{i,k} \leftarrow a_{i,k} / a_{k,k}$ 
7:       for  $j = k$  to  $n$  do  $a_{i,j} \leftarrow a_{i,j} - m_{i,k}a_{k,j}$ 
8:       end for
9:        $b_i \leftarrow b_i - m_{i,k}b_k$ 
10:    end for
11:  end for
12:  Provedi supstituciju unatrag za rješenje  $X$ 
13: end function

```

---



### 4.3 Rješavanje kvadratnog linearnog sustava

**Kvadratni linearni sustavi.** *Kvadratni linearni sustavi* su posebni slučaj linearnih sustava, kod kojih je broj jednadžbi jednak broj nepoznanica ( $m = n$ ). Očito je kako za rješavanje ovih sustava vrijedi sve što je prethodno iskazano i razmatrano za opći slučaj linearnog sustava. Međutim, u slučaju kvadratnih sustava vrijede i mnogi drugi važni teoremi, poput ovog:

! Neka je  $A$  kvadratna matrica reda  $n$ . Za po volji odabran vektor  $B$  duljine  $n$ , sustav  $AX = B$  imaće jedinstveno rješenje onda i samo onda kad je  $A$  regularna matrica.

Dakle, ako je matrica sustava  $A$  regularna ( $r(A) = n$ , tj. rang matrice sustava je maksimalan) postojat će njezina **jedinstvena** inverzna matrica  $A^{-1}$ . Sada, ako inverznom matricom pomnožimo matričnu jednadžbu  $AX = B$  s lijeve strane, dobivamo **jedinstveno** rješenje  $X = A^{-1}B$ . Inače, kvadratne linearne sustave  $AX = B$  kod kojih je matrica  $A$  regularna nazivat ćemo *kvadratnim regularnim linearnim sustavima* ili *Cramerovim sustavima*.

**Cramerovo**<sup>54</sup> **pravilo.** U literaturi često nalazimo i druge alternativne (inovativne) metode za rješavanje kvadratnih linearnih sustava, među kojima je najpoznatije tzv. *Cramerovo pravilo*. Prema ovom pravilu, **svaka** komponenta  $x_i$  rješenja kvadratnog linearnog sustava  $AX = B$  s regularnom matricom  $A$  reda  $n$ , može se napisati u obliku **razlomka** kojemu je u nazivniku determinanta matrice  $A$ , a u brojniku determinanta matrice koja se dobiva iz matrice  $A$  tako da se njezin  $i$ -ti stupac  $S_i$  zamijeni s vektorom  $B$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Cramerovo pravilo obično zapisujemo u sljedećem obliku. Označimo s  $D_i$  determinantu matrice koju dobivamo tako da se u matrici sustava  $A \in \mathcal{M}_n$  zamijeni  $i$ -ti stupac s vektorom  $B$ , a s  $D$  determinantu matrice  $A$ :

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Onda za  $i$ -tu komponentu rješenja vrijedi:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.4)$$

Za linearne sustave  $AX = B$  sa singularnom matricom  $A$  ( $D = 0$ ) vrijedi:

- (C1) Ako je  $D_i \neq 0$  **za barem jedno**  $1, 2, \dots, n$ , tada je linearni sustav  $AX = B$  **proturječan**, odnosno **nema** rješenja;
- (C2) Ako je  $D_i = 0$ , **za svako**  $1, 2, \dots, n$ , moguće je da linearni sustav  $AX = B$  ima ili **beskonačno mnogo rješenja** ili da **nema** rješenja. Za precizniji odgovor potrebno je dodatno razmatranje.

S numeričke točke gledišta Cramerovo pravilo je efikasno za matrice reda 2 i (ponekad) za matrice reda 3. Za kvadratne linearne sustave većeg reda svakako ga treba izbjegavati (složenost Cramerovog pravila za rješavanje kvadratnog linearnog sustava je **eksponencijalna** u  $n$ ). Međutim njegova važnost ostaje u tome što daje **eksplicitni** izraz za rješenje kvadratnog linearnog sustava, zatim što, za razliku od Gaussovog postupka eliminacije nepoznanica, **ne zahtijeva** uvrštavanje jedne nepoznanice za pronalaženje ostalih nepoznanica, i što **ne uključuje** računanje inverzne matrice.

<sup>54</sup> Gabriel Cramer, švicarski matematičar, 1704.–1752.

**Primjer 4.3** Primjenom Cramerovog pravila riješiti linearni sustav:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 25 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 & = & 8 \\ \hline 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 9 \end{array}$$

**Rješenje.**

Linearni sustav je određen jer je matrica sustava  $A$  regularna, odnosno jer vrijedi:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = -20 \neq 0.$$

Nadalje, vrijedi:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 25 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & -3 \\ 9 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -100, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 25 & 2 \\ 1 & 8 & -3 \\ 2 & 9 & -1 \end{vmatrix} = -120, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 25 \\ 1 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -140.$$

Dakle, **jedinstveno** rješenje zadanog linearnog sustava je:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 5, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 6, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 7.$$



## 4.4 Homogeni linearni sustavi

**Homogeni linearni sustavi.** Za linearni sustav  $m$  linearnih jednadžbi sa  $n$  nepoznanica kažemo da je *homogen* ako su **svi** slobodni članovi jednaki nuli, tj. ako vrijedi  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ . Opći oblik homogenog linearnog sustava je dakle:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0, \end{array} \quad (4.5)$$

odnosno

$$AX = 0. \quad (4.6)$$

Homogeni linearni sustav je **uvijek** rješiv, jer ima **barem jedno**, takozvano **trivijalno** rješenje  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , odnosno  $n$ -torka (nul-vektor)  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  je jedno rješenje promatranog homogenog sustava (4.5). U slučaju kad je  $A$  regularna matrica to je i **jedino** rješenje. **Netrivijalna** rješenja će postojati ako je  $r(A) < n$ , tj. ako je matrica sustava singularna. Nadalje, u slučaju kad je  $A$  kvadratna matrica vrijedi **Roucheov**<sup>55</sup> **teorem**: Homogeni linearni sustav  $AX = 0$ , u kojem se broj jednadžbi podudara s brojem nepoznanica, ima i netrivijska

<sup>55</sup> Eugène Rouché, francuski matematičar, 1832.–1910.

rješenja **akko** je  $\det(A) = 0$ . Dakle, homogeni linearni sustav  $AX = 0$ , u kojem se broj jednadžbi podudara s brojem nepoznanica, ima **samo** trivijalna rješenja **akko** je  $\det(A) \neq 0$ , tj. **akko** je taj sustav Cramerov. Dodatno, lako je uvidjeti kako, za homogene linearne sustave, vrijedi:

- ! Ako su  $X$  i  $X'$  **dva različita netrivialna rješenja** homogenog linearnog sustava (4.5), tada je njihova suma  $X + X'$  također netrivialno rješenje tog sustava,
- ! Ako je  $X$  **neko netrivialno rješenje** homogenog linearnog sustava (4.5), tada je  $\lambda X$ , za proizvoljni skalar  $\lambda$ , također netrivialno rješenje tog sustava.

**Primjer 4.4** Riješiti homogeni linearni sustav:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0. \\ \underline{3x_1 + x_2 - x_3} &= 0 \end{aligned}$$

**Rješenje.**

Elementarnim transformacijama **samo** nad retcima proširene matrice  $[A \mid 0]$  zadanog sustava dovodimo ovu matricu do reduciranog oblika  $[A_R \mid 0]$ :

$$\begin{aligned} [A \mid 0] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \end{array} \right\} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim \{ R_3 - 2R_2 \} \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A_R \mid 0]. \end{aligned}$$

Očito je kako matrica  $A_R$  ima 2 netrivialna retka, odnosno da za ekvivalentan reducirani sustav zadanog sustava vrijedi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ \underline{-x_2 - 2x_3} &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, imamo:  $r(A) = 2 = r([A \mid 0]) < 3 = n$ . Stoga, za zadani homogeni linearni sustav **postoje** netrivialna rješenja! Nadalje, iz druge i prve jednadžbe gornjeg ekvivalentnog reduciranog sustava redom vrijedi:

$$(2) \Rightarrow x_2 = -2x_3, \quad (1) \Rightarrow x_1 = x_3,$$

odnosno da **sve** nepoznanice možemo izraziti preko nepoznanice  $x_3$ ! Stavimo li  $x_3 = t$ , gdje je  $t \in \mathbb{R}$  **proizvoljan**, slijedi kako zadani sustav ima **jednparametarsko** rješenje:

$$x_1 = t, \quad x_2 = -2t, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

što je u suglasju s (KC3) (vidi **Kronecker–Capellijev teorem**, str. 140). ■

**Primjer 4.5** Odrediti vrijednost realnog parametra  $\lambda$  tako da sustav:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & x_2 + & x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + & 4x_2 + & x_3 = 0 \\ \hline 6x_1 + (\lambda + 2)x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$$

ima i netrivialnih rješenja. Za veću vrijednost parametra  $\lambda$  naći opće rješenje zadanog sustava.

**Rješenje.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 4 & 1 \\ 6 & \lambda + 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4.$$

Dakle, prema **Roucheovu teoremu** za  $\lambda = -3$  i  $\lambda = 4$  zadani homogeni linearni sustav ima i netrivialnih rješenja.

Nadalje, za  $\lambda = 4$  sustav glasi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & x_2 + & x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + & x_3 = 0. \\ \hline 6x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{array}$$

Sada, za pronalaženje općeg rješenja ovog sustava možemo (kao u prethodnom primjeru) koristiti Gaussov postupak. Dobit ćemo:

$$x_1 = -t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$



## 4.5 Zadaci

**Zadatak 4.1** Iskoristiti

- [i] Gaussov postupak (algoritam),  
 [ii] matrični postupak,  
 [iii] Cramerovo pravilo,  
 u rješavanju sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 10 \\ \text{a) } x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 ; \\ \underline{3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 4 \\ \text{c) } 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 ; \\ \underline{3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y - 2z = 1 \\ \text{e) } -2x + y + 4z = -2 ; \\ \underline{-x + 2y + mz = 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ \text{b) } 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 12 ; \\ \underline{-9x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 13} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - x_3 + x_4 = 3 \\ \text{d) } 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_4 = 2 ; \\ \underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - y - mz = 1 \\ \text{f) } x + my - z = 1 . \\ \underline{mx + y - z = 1} \end{array}$$

U primjerima e) i f) diskutirati rješenja.

**Rješenje.**

$$\begin{array}{ll} \text{a) } X = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}; & \text{b) } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; & \text{c) } X = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{7}{9} \\ -\frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} \end{bmatrix}; & \text{d) } X = \begin{bmatrix} \frac{64}{55} \\ \frac{7}{55} \\ -\frac{31}{55} \\ \frac{14}{11} \end{bmatrix}; \end{array}$$

e) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:  $x = \frac{m+6}{m-2}$ ,  $y = 0$ ,  $z = \frac{4}{m-2}$ .  
 Za  $m = 2$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja;

f) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:  $x = \frac{m-1}{m(m+1)}$ ,  $y = \frac{m-1}{m(m+1)}$ ,  $z = -\frac{1}{m}$ . Za  $m = 0$  ili  $m = -1$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja. Za  $m = 1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:  $X = [1+t \ 0 \ t]^T$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Zadatak 4.2** Riješiti **homogene** sustave:

$$\begin{array}{l} 2x + 3y - z = 0 \\ \text{a) } x + 5y + 2z = 0; \\ \underline{3x + 8y + z = 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} mx - y + 2z = 0 \\ \text{b) } 3x + (2m+3)y - z = 0. \\ \underline{4x + 4y + z = 0} \end{array}$$

**Rješenje.**

a) Sustav ima **netrivijalna** rješenja  $X = \begin{bmatrix} \frac{11}{7}t & -\frac{5}{7}t & t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

b) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{7}{2}\}$  sustav ima **samo trivijalno** rješenje. Za  $m = 1$  **netrivijalna** rješenja su  $X = \begin{bmatrix} -\frac{9}{8}t & \frac{7}{8}t & t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R}$ . Za  $m = \frac{7}{2}$  **netrivijalna** rješenja su  $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t & \frac{1}{4}t & t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R}$ . ■

**Zadatak 4.3** Naći zajednička rješenja sustava:

$$3x + 2y = 5$$

$$x + y = 2.$$

$$\underline{2x - y = 1}$$

**Rješenje.**

$x = 1, y = 1.$  ■

**Zadatak 4.4** Imaju li zajedničku točku ravnine:

$$2x - 4y + 3z = 1$$

$$x - 2y + 4z = 3?$$

$$\underline{3x - y + 5z = 2}$$

**Rješenje.**

Da, determinanta sustava je  $D = -25 \neq 0$ , i to je:  $T = (-1, 0, 1).$  ■

**Zadatak 4.5** Odrediti parametar  $a \in \mathbb{R}$  tako da sustav:

$$3x + ay = 5$$

$$x + y = 2$$

$$\underline{ax + 2y = 4}$$

ima rješenje i zatim naći to rješenje.

**Rješenje.**

$$a_1 = 2, \quad x_1 = 1, \quad y_1 = 1,$$

$$a_2 = \frac{5}{2}, \quad x_2 = 0, \quad y_2 = 2.$$
 ■

**Zadatak 4.6** Za koje  $a \in \mathbb{R}$  sustav:

$$2x + 6y + (a + 6)z = 0$$

$$-x + 7y + 5z = 0$$

$$\underline{ax + 5y + 13z = 0}$$

ima **netrivijalna** rješenja. Za dobivene vrijednosti realnog parametra  $a$  naći rješenja tog sustava.

**Rješenje.**

$$a_1 = 4, \quad x_1 = -2t, \quad y_1 = -t, \quad z_1 = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$a_2 = -\frac{45}{7}, \quad x_2 = \frac{33}{20}t, \quad y_2 = -\frac{67}{140}t, \quad z_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 4.7** Riješiti sustave linearnih jednačnji:

$$\begin{array}{ll} x + 2y + 3z = 1 & x + y + z = 9 \\ \text{a) } 2x + 4y - 6z = -2; & \text{b) } x + 2y + 3z = 16; \\ \quad \underline{x - 2y - 6z = 4} & \quad \underline{x + 3y + 2z = 17} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 - 14x_3 = -8 & x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ \text{c) } 2x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 9; & \text{d) } 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -4. \\ \quad \underline{4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 24} & \quad \underline{27x_1 + 9x_2 + 3x_3 = 36} \end{array}$$

**Rješenje.**

$$\text{a) } X = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad \text{b) } X = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } X = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } X = \begin{bmatrix} 7 \\ -21 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 4.8** Diskutirati sustave linearnih jednačnji:

$$\begin{array}{ll} 4x + 8y + (m+3)z = -2 & x + (m+2)y - z = 0 \\ \text{a) } (m+2)x + 6y + 3z = 1; & \text{b) } (m+2)x + y - z = 1. \\ \quad \underline{x + 2my + mz = -1} & \quad \underline{x + y - (m+2)z = m+3} \end{array}$$

**Rješenje.**

a) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:  $x = \frac{1}{m-1}$ ,  $y = \frac{1}{2(m-1)}$ ,  $z = \frac{-2}{m-1}$ ;  
 Za  $m = -3$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{4}(-2t - 1)$ ,  $z = \frac{1}{6}(8t + 5)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; Za  $m = 1$  sustav **nema** rješenja.

b) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -1\}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:  $x = 0$ ,  $y = \frac{-1}{m+1}$ ,  $z = \frac{-m-2}{m+1}$ ;  
 Za  $m = -4$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{3}(3t + 1)$ ,  $z = \frac{1}{3}(-3t - 2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ; Za  $m = -1$  sustav **nema** rješenja.

**Zadatak 4.9** Riješiti **homogene** sustave:

$$\begin{array}{ll} 2x - y + 3z = 0 & 3x + 2y - z = 0 \\ \text{a) } x + 2y - 5z = 0; & \text{b) } 2x - y + 3z = 0; \\ \quad \underline{3x + y - 2z = 0} & \quad \underline{x + 3y - 4z = 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3x - y + 2z = 0 & x + y + z = 0 \\
 \text{c) } 2x + 3y - 5z = 0; & \text{d) } 3x + y - z = 0. \\
 \underline{x + y + z = 0} & \underline{2x + y = 0}
 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } X = \begin{bmatrix} t \\ -13t \\ -5t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}; & \text{b) } X = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{11}{5}t \\ -\frac{7}{5}t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}; & \text{c) } X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \\
 \text{d) } X = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}. & & 
 \end{array}$$

**Zadatak 4.10** Odrediti parametar  $m \in \mathbb{R}$  tako da **homogeni** sustav ima i **netrivijalna** rješenja i naći ta rješenja.

$$\begin{array}{ll}
 x + y + z = 0 & x + y + mz = 0 \\
 \text{a) } mx + 4y + z = 0; & \text{b) } x - y - z = 0; \\
 \underline{6x + (m+2)y + 2z = 0} & \underline{mx + y + 5z = 0} \\
 \\ 
 3x + y + mz = 0 & mx_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
 \text{c) } 4x - 8y + mz = 0; & \text{d) } x_1 + mx_2 + x_3 + x_4 = 0 \\
 \underline{5x - 3y + 3z = 0} & x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 = 0 \\
 & \underline{x_1 + x_2 + x_3 + mx_4 = 0}
 \end{array}$$

**Rješenje.**

a) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 4\}$  sustav ima samo **trivijalna** rješenja;

Za  $m = -3$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t & \frac{4}{3}t & -\frac{7}{3}t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

Za  $m = 4$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t & -t & 0 \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

b) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$  sustav ima samo **trivijalna** rješenja;

Za  $m = -3$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t & \frac{1}{2}t & \frac{1}{2}t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

Za  $m = 3$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t & 2t & -t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

c) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  sustav ima samo **trivijalna** rješenja;

Za  $m = 2$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} 9t & t & -14t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

d) Za  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$  sustav ima samo **trivijalna** rješenja;

Za  $m = -3$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t & t & t & t \end{bmatrix}^T, t \in \mathbb{R};$

Za  $m = 1$  rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t & u & -t - u - v & v \end{bmatrix}^T, t, u, v \in \mathbb{R}.$

**Zadatak 4.11** Riješiti sustave linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{lcl} x + y + z + u = 5 & & 2x + 3y - z - u = 0 \\ a) \quad 2x - y + 4z + 5u = 8 & & x - y - 2z - 4u = 0 \\ \quad x + 2y - z + u = -2; & & 3x + y + 3z - 2u = 0 \\ \quad 3x + 2y + 2z + 2u = 8 & & 6x + 3y - 7u = 0 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$a) \quad X = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad b) \quad X = \begin{bmatrix} \frac{5}{3}t \\ -t \\ -\frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 4.12** Odrediti polinome  $P_n(x)$  najnižeg stupnja koji ispunjavaju uvjete:

- a)  $P(2) = -3$ ,  $P(-1) = 9$ ,  $P(1) = -1$ ;  
b)  $P(1) = 4$ ,  $P(2) = 3$ ,  $P(-1) = 0$ ,  $P(3) = 4$ .

**Rješenje.**

- a)  $P_2(x) = x^2 - 5x + 3$ ;  
b)  $P_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ .

**Zadatak 4.13** Graf funkcije  $y = P(x)$ , gdje je  $P(x)$  polinom, prolazi kroz točke:  $T_1 = (1, -1)$ ,  $T_2 = (0, 1)$ ,  $T_3 = (2, 5)$ ,  $T_4 = (3, 37)$ . Odrediti polinom  $P(x)$ .

**Rješenje.**

$$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1.$$

**Zadatak 4.14** Naći vrijednost parametra  $a \in \mathbb{R}$  za koje sustav:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 = a \\ & ax_2 + 2x_3 + (a-1)x_4 = 0 \\ x_1 + & x_2 + 2x_3 + (a+1)x_4 = 1+a \\ -x_1 + (a-1)x_2 & + & ax_4 = -1-a \end{array}$$

- a) ima **jedinstveno** rješenje;  
b) ima **beskonačno mnogo** rješenja;  
c) **nema** rješenja.

**Rješenje.**

Prema **Kronecker–Capellijevu teoremu** (vidi str. 140) struktura rješenja sustava linearnih jednačbi je u ovisnosti o rangu matrice sustava i rangu proširene matrice sustava. Stoga, prvo ćemo odrediti rangove ovih matrica! U tu svrhu, poželjno je proširenu matricu sustava svesti na **gornje trokutastu** matricu, što je najlakše učiniti koristeći **Gaussov postupak eliminacije** (vidi str. 142).

$$\begin{aligned}
 A_P = [A \mid B] &= \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 & a-1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & a+1 & 1+a \\ -1 & a-1 & 0 & a & -1-a \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a & 1 & a+1 & -1 \end{array} \right] \sim \\
 &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

a) Za  $a+2 \neq 0$  i  $a \neq 0$ , odnosno za  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ , je  $r(A_P) = r(A) = 4$ , pa zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje dano u obliku:

$$x_1 = \frac{a^2 - a + 2}{a}, \quad x_2 = -\frac{2}{a}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0;$$

b) Za  $a = -2$  je  $r(A_P) = r(A) = 3 < n = 4$ , pa sustav ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = -4 - \frac{7}{2}t, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2}t, \quad x_3 = 1 + 2t, \quad x_4 = t, \quad t \in \mathbb{R};$$

c) Za  $a = 0$  je  $r(A) = 3$  i  $r(A_P) = 4$ , što povlači da sustav **nema** rješenja.

**Zadatak 4.15** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{aligned}
 ax_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\
 3x_1 + 3x_2 - ax_3 &= 5, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\
 \underline{5x_1 - x_2 + 3x_3} &= 5
 \end{aligned}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -1$  i  $a \neq 0$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{10}{a}, \quad x_2 = -\frac{5(a+2)}{a}, \quad x_3 = \frac{-20}{a};$$

Za  $a = -1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{1}{5}(5 - 2t), \quad x_3 = \frac{1}{5}(10 - 9t), \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = 0$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.16** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{aligned}
 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\
 ax_1 + x_2 + x_3 &= 2a, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\
 \underline{x_1 + ax_2 - x_3} &= 3a
 \end{aligned}$$

Zatim dati geometrijsku interpretaciju sustava i rješenja.

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -1$  i  $a \neq 4$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{2a}{a+1}, \quad x_2 = \frac{3a}{a+1}, \quad x_3 = \frac{-a}{a+1},$$

što s geometrijske točke gledišta možemo interpretirati da se tri zadana ravnine **sijeku u točno jednoj** točki prostora;

Za  $a = 4$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = 4 - t, \quad x_3 = 4 - 3t, \quad t \in \mathbb{R},$$

koja s geometrijske točke gledišta možemo interpretirati kao **presječnicu** (zajednički pravac) zadanih triju ravnina;

Za  $a = -1$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.17** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} ax_1 + & x_2 - & x_3 = 1 \\ x_1 + & ax_2 - & x_3 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \hline x_1 + (2a-1)x_2 + (a-2)x_3 = 1 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -2$  i  $a \neq 1$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{1}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = \frac{-1}{a+2};$$

Za  $a = 1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = u + v - 1, \quad u, v \in \mathbb{R};$$

Za  $a = -2$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.18** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + & x_2 + (a+4)x_3 = 3 \\ x_1 & + & 2x_3 = 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \hline x_1 - ax_2 - & 2x_3 = 3 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -2$  i  $a \neq 2$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{a-4}{a-2}, \quad x_2 = \frac{-2}{a-2}, \quad x_3 = \frac{1}{a-2};$$

Za  $a = -2$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = 2 - t, \quad x_3 = \frac{1 - t}{2}, \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = 2$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja. ■

**Zadatak 4.19** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - ax_3 &= 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 &= 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \underline{2x_1 - ax_2 + 3x_3} &= \underline{-1} \end{aligned}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -1$  i  $a \neq -\frac{1}{3}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{4}{3a+1}, \quad x_2 = \frac{3}{3a+1}, \quad x_3 = \frac{-3}{3a+1};$$

Za  $a = -1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{t-4}{4}, \quad x_3 = \frac{-3t}{4}, \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = -\frac{1}{3}$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja. ■

**Zadatak 4.20** U sustavu linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1, \\ \underline{3x_1 + 5x_2 + mx_3} &= \underline{-6} \end{aligned}$$

odrediti realni parametar  $m \in \mathbb{R}$  tako da sustav ima **jedno jedino** rješenje i naći to rješenje.

**Rješenje.**

$$m = -5, \quad x_1 = -\frac{11}{8}, \quad x_2 = -\frac{9}{8}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}.$$

**Zadatak 4.21** Za koji realni parametar  $m \in \mathbb{R}$  sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7, \\ \underline{2x_1 + 3x_2 - 3x_3} &= \underline{m} \end{aligned}$$

ima **jedinstveno** rješenje? Za nađeno  $m$  naći rješenja sustava.

**Rješenje.**

$$m = 14, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2.$$

**Zadatak 4.22** Odrediti realni parametar  $m \in \mathbb{R}$  tako da sustav:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ \underline{3x_1 + 2x_2 + 3x_3} &= \underline{m} \end{aligned}$$

ima rješenje. Za takav  $m$  naći rješenja sustava.**Rješenje.**

$$m = 8, \quad x_1 = t, \quad x_2 = 7, \quad x_3 = -t - 2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 4.23** Za koju vrijednost realnog parametara  $m \in \mathbb{R}$  sustav:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4 \\ \underline{3x_1 + 11x_2 + 5x_3} &= \underline{m} \end{aligned}$$

nema rješenje? Kako glasi rješenje sustava za ono  $m$  za koje je sustav rješiv?**Rješenje.**Za  $m = -2$  sustav je rješiv i ima beskonačno mnogo rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{1-t}{2}, \quad x_3 = \frac{t-3}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sustav nema rješenja  $\forall m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ .**Zadatak 4.24** U ovisnosti o realnom parametaru  $\lambda \in \mathbb{R}$  diskutirati rješenja sustava:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 4, \\ \underline{3x_1 + 2x_2 + 3x_3} &= \underline{12} \end{aligned}$$

**Rješenje.**Za  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  sustav je određen i ima jedinstveno rješenje:

$$x_1 = -\frac{2(\lambda - 7)}{\lambda - 1}, \quad x_2 = 9, \quad x_3 = -\frac{12}{\lambda - 1}.$$

Za  $\lambda = 1$  sustav nema rješenja.

**Zadatak 4.25** U ovisnosti o realnom parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$  riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1 + x_2 & = & 0 \\ \lambda x_2 + x_3 & = & \lambda \\ x_1 + \lambda x_3 & = & \lambda^2 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \lambda.$$

Za  $\lambda = -1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 4.26** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 & = & 2a, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ x_1 + x_2 + ax_3 & = & -a \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  i  $a \neq 1$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{a^2 + 1}{a - 1}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{-2a}{a - 1};$$

Za  $a = 0$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = 1$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.27** Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & = & a \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 & = & 2a. \\ x_1 + x_2 - (1+a)x_3 & = & a \end{array}$$

Diskutirati rješenja sustava za sve vrijednosti parametra  $a \in \mathbb{R}$ .

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  i  $a \neq -2$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = a - 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 0;$$

Za  $a = 0$  sustav je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = 0, \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = -2$  sustav je također neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -t - 3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 4.28** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} ax_1 + x_2 + x_3 & = & a \\ x_1 + ax_2 + x_3 & = & 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \hline x_1 - x_2 + ax_3 & = & a \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  i  $a \neq \pm 1$  sustav je određen i ima jedinstveno rješenje:

$$x_1 = \frac{a^2 + 1}{a(a + 1)}, \quad x_2 = \frac{1 - a}{a(a + 1)}, \quad x_3 = \frac{a - 1}{a};$$

Za  $a = 1$  sustav je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = -1$  i  $a = 0$  sustav je nemoguć i nema rješenja.

**Zadatak 4.29** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} ax_1 + 4x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 6, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \hline 6x_1 + (a + 2)x_2 + 2x_3 & = & 13 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -3$  i  $a \neq 4$  sustav je određen i ima jedinstveno rješenje:

$$x_1 = \frac{1}{4 - a}, \quad x_2 = \frac{1}{a - 4}, \quad x_3 = 6;$$

Za  $a = -3$  sustav je neodređen i ima beskonačno mnogo rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{1}{3}(4t - 1), \quad x_3 = \frac{1}{3}(19 - 7t), \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = 4$  sustav je nemoguć i nema rješenja.

**Zadatak 4.30** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + ax_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + ax_2 + 5x_3 & = & 1, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \hline 3x_1 + 6x_2 + 3ax_3 & = & 2 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -4$  i  $a \neq 3$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{2}{3(a+4)}, \quad x_2 = \frac{1}{a+4}, \quad x_3 = \frac{2}{3(a+4)};$$

Za  $a = 3$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{1}{3}(1 - 6t), \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = -4$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.31** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} ax_1 + 2x_2 + 4x_3 & = & a + 1 \\ x_1 - 3x_2 + 2ax_3 & = & -4, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \\ \hline 3x_1 - x_2 + 2ax_3 & = & 0 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -2$  i  $a \neq 4$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{a+1}{a+2}, \quad x_2 = \frac{a+3}{a+2}, \quad x_3 = \frac{-1}{a+2};$$

Za  $a = 4$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = 2 - t, \quad x_3 = \frac{1}{4}(1 - 2t), \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $a = -2$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.32** Odrediti realni parametar  $a \in \mathbb{R}$  tako da sustav linearnih jednačbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 2ax_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 + ax_3 & = & 0 \\ \hline ax_1 - x_2 + x_3 & = & 0 \end{array}$$

ima **netrivijalna** rješenja i naći ta rješenja.

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 1$  i  $a \neq 3$  zadani sustav ima **samo trivijalna** rješenja;

Za  $a = 1$  netrivialna rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ 3t \end{bmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

Za  $a = 3$  netrivialna rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ t \end{bmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Zadatak 4.33** Za koje vrijednosti realnog parametra  $a \in \mathbb{R}$  sustav linearnih jednažbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + ax_2 + 2x_3 & = & 0 \\ (a+1)x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 0 \\ 7x_1 - ax_2 + 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

ima netrivialna rješenja. Za nađene vrijednosti realnog parametra  $a$  riješiti zadani sustav.

**Rješenje.**

Za  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq -3$  i  $a \neq 4$  zadani sustav ima samo trivijalna rješenja;

Za  $a = -3$  netrivialna rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -2t \end{bmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ;

Za  $a = 4$  netrivialna rješenja su:  $X = \begin{bmatrix} t \\ 3t/4 \\ -2t \end{bmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Zadatak 4.34** Riješiti sustav linearnih jednažbi Gaussovom metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 & = & 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 & = & 1 \\ 7x_2 - 3x_3 - x_4 & = & 3 \end{array}$$

**Rješenje.**

$x_1 = -8$ ,  $x_2 = t + 3$ ,  $x_3 = 2(t + 3)$ ,  $x_4 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Zadatak 4.35** Gaussovom metodom eliminacije riješiti sustav linearnih jednažbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

**Rješenje.**

$x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = -2$ .

**Zadatak 4.36** Riješiti sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 9x_4 & = & 10 \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 7x_4 & = & 5 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 4x_4 & = & 4 \\ \hline 3x_1 - x_2 + 8x_3 - 8x_4 & = & 2 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

**Zadatak 4.37** Matričnim postupkom riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 5 \\ \hline 6x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 1 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -1.$$

**Zadatak 4.38** Odrediti rang matrice sustava, te riješiti sustav linearnih jednadžbi Gaussovom metodom eliminacije:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ \hline 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad r(A) = 3.$$

Zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$

**Zadatak 4.39** Ispitati prirodu rješenja, te zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 & = & 7 \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 & = & -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & 5 \\ \hline 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 & = & 15 \end{array}$$

**Rješenje.**

Zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = 5, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = -3.$

**Zadatak 4.40** Ispitati prirodu rješenja, te zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = & 5 \\ \hline 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

**Rješenje.**

Zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = \frac{7}{4}$ ,  $x_2 = -\frac{3}{4}$ ,  $x_3 = \frac{1}{2}$ ,  $x_4 = \frac{3}{4}$ .

**Zadatak 4.41** Ispitati prirodu rješenja, te zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 9 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 & = & -2 \\ \hline 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 & = & 10 \end{array}$$

**Rješenje.**

Zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 3$ ,  $x_4 = -2$ .

**Zadatak 4.42** Naći rješenje sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 & = & 3 \\ \hline 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -2 \end{array}$$

**Rješenje.**

$x_1 = -8$ ,  $x_2 = 12$ ,  $x_3 = -1$ .

**Zadatak 4.43** Riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = & -7 \\ \hline 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = & 14 \end{array}$$

**Rješenje.**

$x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -2$ .

**Zadatak 4.44** Riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & -3 \\ \hline x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & -3 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -1.$$

**Zadatak 4.45** Riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 & = & -6 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ \hline 2x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 3 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = -149, \quad x_2 = -42, \quad x_3 = -171, \quad x_4 = -28.$$

**Zadatak 4.46** Ispitati prirodu rješenja, te zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 & = & -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 & = & 9 \\ \hline 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 9 \end{array}$$

**Rješenje.**

Zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 1.$

**Zadatak 4.47** Ispitati prirodu rješenja, te zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = & 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 1 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 & = & 6 \\ \hline 3x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

**Rješenje.**

Zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = \frac{17}{5}, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -\frac{13}{5}, \quad x_4 = 0.$

**Zadatak 4.48** Ispitati prirodu rješenja, te zatim riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 4x_2 & + & x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = & 5 \\ \hline x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

**Rješenje.**

Zadani sustav ima **beskonačno mnogo** rješenja:  $x_1 = t$ ,  $x_2 = \frac{1-t}{2}$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = -1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . ■

**Zadatak 4.49** Ustvrditi da sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 & = & -1 \\ \hline 3x_1 + 5x_2 - 5x_3 & = & -6 \end{array}$$

ima **jedinstveno** rješenje i naći to rješenje.

**Rješenje.**

Za **matricu sustava**  $A$  i **proširenu matricu sustava**  $A_P = [A \mid B]$  vrijedi:  $r(A) = 3 = r(A_P) = n$ . Stoga, zadani sustav ima **jedinstveno** rješenje:  $x_1 = -\frac{11}{8}$ ,  $x_2 = -\frac{9}{8}$ ,  $x_3 = -\frac{3}{4}$ . ■

**Zadatak 4.50** Riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_3 = 4. \\ \hline 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 4 \end{array}$$

**Rješenje.**

Svođenjem proširene matrice sustava  $A_P = [A \mid B]$  na **reducirani oblik** imamo:

$$A_P = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right].$$

Stoga, zadani sustav je **proturječan** i **nema** rješenja. ■

**Zadatak 4.51** Riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 14 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 & = & 7 \\ \hline -7x_1 + 8x_2 - x_3 & = & 10 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = 11, \quad x_2 = 13, \quad x_3 = 17.$$

**Zadatak 4.52** Cramerovim pravilom riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & x_3 = 4. \\ \hline 7x_1 + 2x_2 & = & 8 \end{array}$$

**Rješenje.**

$\Delta = 0 \implies$  zadani sustav nije **regularan**. Dodatno je:  $\Delta_1 = -4 \neq 0 \implies$  zadani sustav **nema** rješenja.

**Zadatak 4.53** Cramerovim pravilom riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 11 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 9 \\ \hline 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 25 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 4.$$

**Zadatak 4.54** Cramerovim pravilom riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ 3x_2 + x_3 & = & 8 \\ \hline 6x_1 - 3x_2 & = & -2 \end{array}$$

**Rješenje.**

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = \frac{10}{3}, \quad x_3 = -2.$$

**Zadatak 4.55** Odrediti rješenja sustava linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1 + x_2 - x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 & = & 3 \\ \hline x_1 + \lambda x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-3, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\}$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{\lambda - 2}{\lambda^2 - 3\lambda + 1}, \quad x_2 = \frac{2\lambda^2 - 10\lambda + 7}{\lambda^3 - 8\lambda + 3}, \quad x_3 = \frac{3\lambda^2 - 8\lambda + 4}{\lambda^3 - 8\lambda + 3}.$$

Za  $\lambda = -3$  i  $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  sustav je **proturječan** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.56** Odrediti  $\lambda \in \mathbb{R}$  tako da sustav linearnih jednačnji:

$$\begin{array}{rcl} 3\lambda x_1 + 9x_2 - 15x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 6x_2 - 10x_3 & = & 4 \\ x_1 + 12x_2 - 20x_3 & = & 1 + \lambda \end{array}.$$

ima najmanje jedno rješenje i naći sva rješenja ovoga sustava.

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 7\}$  sustav je **proturječan** i **nema** rješenja.

Za  $\lambda = 7$  sustav je **neodređen** i ima  $\infty$  **mnogo** rješenja:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{2+5t}{3}$ ,  $x_3 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Za  $\lambda = 1$  sustav je **neodređen** i ima  $\infty$  **mnogo** rješenja:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 5s$ ,  $x_3 = 3s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Zadatak 4.57** U ovisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$  riješiti sustav linearnih jednačnji:

$$\begin{array}{rcl} \lambda x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 & = & \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & \lambda \end{array}.$$

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 1$  i  $\lambda \neq -2$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = -\frac{1}{\lambda + 2}, \quad x_2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2}, \quad x_3 = \frac{\lambda + 1}{\lambda + 2};$$

Za  $\lambda = 1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = u, \quad x_2 = v, \quad x_3 = 1 - u - v, \quad u, v \in \mathbb{R};$$

Za  $\lambda = -2$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.58** U ovisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$  riješiti sustav linearnih jednačnji:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & 2 \end{array}.$$

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 1$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{-\lambda - 3}{\lambda - 1}, \quad x_2 = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}, \quad x_3 = \frac{2}{\lambda - 1};$$

Za  $\lambda = 1$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.59** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= -7 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + \lambda^2 x_4 &= \lambda \end{aligned}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq \pm 1$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{5\lambda + 4}{10(\lambda + 1)}, \quad x_2 = \frac{-45\lambda - 1}{10(\lambda + 1)}, \quad x_3 = \frac{-65\lambda - 8}{10(\lambda + 1)}, \quad x_4 = \frac{1}{\lambda + 1};$$

Za  $\lambda = 1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{1}{2}(35 - 88t), \quad x_3 = 22 - 57t, \quad x_4 = -5(2t - 1), \quad t \in \mathbb{R};$$

Za  $\lambda = -1$  sustav je **nemoguć** i **nema** rješenja.

**Zadatak 4.60** U ovisnosti o parametru  $\lambda \in \mathbb{R}$  riješiti sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= \lambda^2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= \lambda^3 \end{aligned}$$

**Rješenje.**

Za  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 1$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = -\lambda^2 - 2\lambda - 2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \lambda + 1, \quad x_4 = \lambda^2 + \lambda + 1;$$

Za  $\lambda = 1$  sustav je **neodređen** i ima **beskonačno mnogo** rješenja:

$$x_1 = t, \quad x_2 = u, \quad x_3 = v, \quad x_4 = 1 - t - u - v, \quad t, u, v \in \mathbb{R}.$$

**Zadatak 4.61** Diskutirati rješenja sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \alpha x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= \beta \\ 2x_1 - \alpha x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

u ovisnosti o realnim parametrima  $\alpha$  i  $\beta$ .

**Rješenje.**

Za  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq -4$  i  $\alpha \neq -1$  sustav je **određen** i ima **jedinstveno** rješenje:

$$x_1 = \frac{\alpha\beta + 2\beta + 1}{\alpha^2 + 5\alpha + 4}, \quad x_2 = \frac{2\beta - 1}{\alpha + 4}, \quad x_3 = \frac{\alpha^2\beta + 2\alpha - 2\beta + 1}{\alpha^2 + 5\alpha + 4};$$

Za  $\alpha = -1$  sustav će biti **neodređen** i imati **beskonačno mnogo** rješenja ako i samo ako je  $\beta = -1$ ! Tada će vrijediti:

$$x_1 = u, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1 - u, \quad u \in \mathbb{R};$$

Za  $\alpha = -4$  sustav će također biti **neodređen** i imati **beskonačno mnogo** rješenja ako i samo ako je  $\beta = \frac{1}{2}$ ! Tada će vrijediti:

$$x_1 = v, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6v + 1), \quad x_3 = \frac{1}{2}(-14v - 1), \quad v \in \mathbb{R}.$$

Zadani sustav je **nemoguć** (nema rješenja) ako je  $\alpha = -1$  i  $\beta \neq -1$ , odnosno  $\alpha = -4$  i  $\beta \neq \frac{1}{2}$ . ■

**Zadatak 4.62** Za koje vrijednosti parametara  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  rješenje linearnog sustava:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0$$

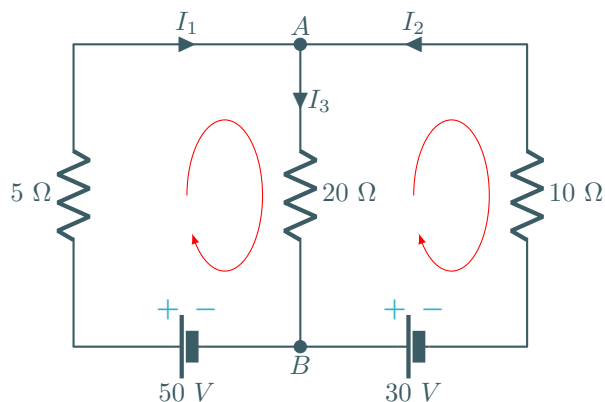
$$x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 = 0$$

predstavlja **samo** ishodište koordinatnog sustava?

**Rješenje.**

Zadani linearni sustav je **homogen** i njegova determinanta je  $(\alpha - 1)(\alpha - \beta)$ . Dakle, ako je  $(\alpha - 1)(\alpha - \beta) \neq 0$ , onda zadani sustav ima **samo** trivijalno rješenje koje **geometrijski** predstavlja ishodište koordinatnog sustava. ■

**Zadatak 4.63** Kolike su jakosti struja  $I_1$ ,  $I_2$  i  $I_3$  u strujnome krugu na slici?

**Rješenje.**

Primjenom **I. Kirchhoffovog**<sup>56</sup> **zakona** (*algebarski zbroj struja u svakom čvoru strujnoga kruga je nula*) na čvorovima A i B, te primjenom **II. Kirchhoffovog zakona** (*algebarski zbroj napona u svakoj zatvorenoj petlji strujnoga kruga je nula*) na tri zatvorene petlje unutar zadanoga strujnoga

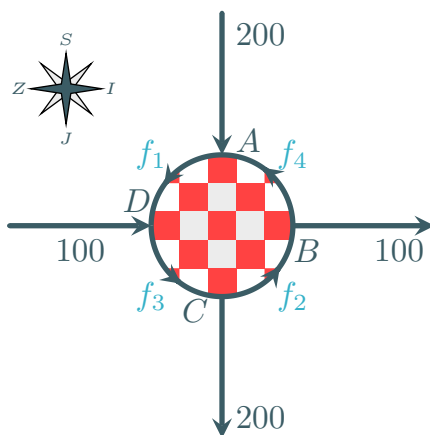
<sup>56</sup> Gustav Robert Kirchhoff, njemački fizičar, 1824.–1887. Bio je Gaussov učenik.

kruga doći ćemo do linearnog sustava  $(\zeta)$  od tri jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{array}{rcl} I_1 + I_2 - I_3 & = & 0 \\ 5I_1 + 20I_3 & = & 50 \\ 10I_2 + 20I_3 & = & -30 \end{array} \quad (\zeta)$$

čije **jedinstveno** rješenje je  $I_1 = 6 \text{ A}$ ,  $I_2 = -5 \text{ A}$ ,  $I_3 = 1 \text{ A}$ . Činjenica da struja  $I_2$  ima **negativan** iznos govori nam da je **pravi smjer** ove struje **suprotan** od referentnog, tj. onog zadanog slikom!

**Zadatak 4.64** Na slici ispod prikazana je mreža jednosmjernih prometnica s brzinama protoka (broj svih vozila po satu), koje se sastaju u raskršću. Napisati sustav linearnih jednadžbi koji modelira ovu stvarnu situaciju.



### Rješenje.

Za spojeve  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  redom vrijedi:

$$\begin{array}{lcl} A : & 200 + f_4 & = f_1 \\ B : & 100 + f_4 & = f_2 \\ C : & 200 + f_2 & = f_3, \\ D : & 100 + f_1 & = f_3 \end{array}$$

što je ekvivalentno sa sljedećim linearnim sustavom:

$$\begin{array}{rcl} f_1 & - & f_4 = 200 \\ f_2 & - & f_4 = 100 \\ -f_2 + f_3 & = & 200 \\ -f_1 + f_3 & = & 100 \end{array} \quad (\circ)$$

Rješavanje sustava  $(\circ)$  ostavljamo čitatelju za vježbu.

**Zadatak 4.65** Profesionalni ulagač prodao je svoj vlasnički udio u trima poduzećima tijekom triju tromjesječja. U prvom tromjesječju prodao je 100 dionica poduzeća  $A$ , 100 dionica poduzeća  $B$  i 200 dionica poduzeća  $C$  te pritom dobio 65 000 €. U drugom tromjesječju prodao je 50 dionica

poduzeća  $A$ , 200 dionica poduzeća  $B$  i 100 dionica poduzeća  $C$ , zaradivši pritom 55 000 €. U trećem tromjesječju je zaradio 45 000 € prodavši 100 dionica poduzeća  $A$ , 100 dionica poduzeća  $B$  i 100 dionica poduzeća  $C$ . Kolika je cijena svake dionice?

**Rješenje.**

Cijena dionice  $A$  je 100 €, dionice  $B$  je 150 € i dionice  $C$  je 200 €.

**Zadatak 4.66** Na poziv Ministarstva zaštite okoliša da zajednički zazelenimo Lijepu Našu, grad Zadar je tijekom tri godišnja doba sadio autohtone vrste biljaka: **hrast** ( $H$ ), **maslinu** ( $M$ ) i **lavandu** ( $L$ ). U proljeće je posađeno 100 **hrastova**, 100 **maslina** i 200 grmova **lavande** za 23 000 €. Na ljeto je posađeno 50 **hrastova**, 200 **maslina** i 100 grmova **lavande** za 29 500 €. U jesen je posađeno 100 **hrastova**, 100 **maslina** i 100 grmova **lavande** za 21 500 €. Kolika je cijena pojedine vrste sadnice?

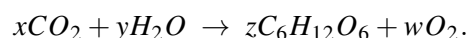
**Rješenje.**

Cijena sadnice **hrasta** ( $H$ ) iznosi 80 €, **masline** ( $M$ ) 120 €, a **lavande** ( $L$ ) 15 €.

**Zadatak 4.67** Označimo broj molekula *ugljkova dioksida*, *vode*, *glukoze* i *kisika* redom sa  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $w$ . Naći brojeve **reaktanata** i **produkata** u procesu fotosinteze (proces koji se odvija u kloroplastima biljnih stanica u kojima biljka iz ugljikova dioksida ( $CO_2$ ) i vode ( $H_2O$ ), s pomoću Sunčeve energije stvara šećer glukozu ( $C_6H_{12}O_6$ ) i kisik ( $O_2$ )).

**Rješenje.**

U ovom zadatku, u biti, tražimo **uravnoteženu** kemijsku reakciju oblika:



Usporedbom broja atoma reaktanata ugljika, kisika i vodika s brojem atoma produkata istih elemenata, dobit ćemo tri linearne jednadžbe:

$$\text{UGLJIK : } x = 6z$$

$$\text{KISIK : } 2x + y = 6z + 2w,$$

$$\text{VODIK : } 2y = 12z$$

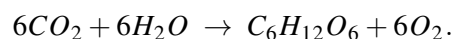
što je ekvivalentno sa sljedećim **homogenim** linearnim sustavom:

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 6z & & = 0 \\ 2x + & y - & 6z - 2w & & = 0. \\ & 2y - 12z & & & = 0 \end{array} \quad (\odot)$$

Homogeni sustav  $(\odot)$  sadrži tri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice, dakle nužno ima **beskonačno mnogo rješenja**, tj. vrijedi (detalje prepuštamo čitatelju):

$$x = t, \quad y = t, \quad z = \frac{1}{6}t, \quad w = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

U pravilu za  $t$  odabiremo **najmanju pozitivnu cjelobrojnu** vrijednost koja će rezultirati s cjelobrojnim varijablama  $x$ ,  $y$ ,  $z$  i  $w$ . Stoga za  $t$  biramo vrijednost 6 i dobivamo:  $x = 6$ ,  $y = 6$ ,  $z = 1$  i  $w = 6$ , odnosno tražena uravnotežena kemijska reakcija je oblika:





## 5. Linearni prostori i linearni operatori

### 5.1 Linearni prostori

**Pojam linearnog prostora.** Grubo govoreći *linearni ili vektorski prostor* je skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja i operacija množenja skalarima koje poštuju uobičajena računska pravila. Neka je  $V$  neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja  $+: V \times V \rightarrow V$  i operacija množenja skalarima iz polja  $\mathbb{F}$ ,  $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ . Kažemo da je uređena trojka  $(V, +, \cdot)$  *linearni ili vektorski prostor* nad poljem  $\mathbb{F}$  ako vrijedi:

- (VP1)  $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in V$ ,
- (VP2) postoji  $0 \in V$  sa svojstvom  $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V$ ,
- (VP3) za svaki  $a \in V$  postoji  $-a \in V$  takav da je  $a + (-a) = -a + a = 0$ ,
- (VP4)  $a + b = b + a, \forall a, b \in V$ ,
- (VP5)  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$ ,
- (VP6)  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V$ ,
- (VP7)  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V$
- (VP8)  $1 \cdot a = a, \forall a \in V$ .

Linearni (vektorski) prostor je, dakle, struktura koja se sastoji od nekog nepraznog skupa  $V$  snabdjevenog dvjema operacijama koje trebaju zadovoljavati navedenih 8 svojstava. Elementi skupa  $V$  nazivaju se *vektori (točke)*, dok se elementi polja  $\mathbb{F}$  nazivaju *skalari*. Najčešće se kao polje  $\mathbb{F}$  uzima polje realnih ili polje kompleksnih brojeva. U tim slučajevima kažemo kako je riječ o realnom, tj. kompleksnom vektorskom prostoru.

**Najvažniji primjeri linearnih prostora.** Neki najpoznatiji linearni (vektorski) prostori su sljedeći skupovi:

- (Pr1) Skupovi  $\mathbb{V}^1, \mathbb{V}^2$  i  $\mathbb{V}^3$  vektora na pravcu, u ravnini i u prostoru redom su vektorski prostori uz standardne operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom. Nazivamo ih *klasičnim* vektorskim prostorima.
- (Pr2) Skup matrica  $\mathcal{M}_{m,n}$  (skup svih matrica tipa  $m \times n$ ) je linearni prostor uz standardne operacije zbrajanja matrica i množenja matrica skalarom.

- (Pr3) Skup  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, \dots, n\}$  je linearni prostor uz operacije
- $$(x_1, \dots, x_n) + (x'_1, \dots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n),$$
- $$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$
- (Pr4) Skup polinoma  $\mathcal{P}_n$  (skup svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog  $n$ ) je linearni prostor uz operacije,
- $$(x_n t^n + \dots + x_1 t + x_0) + (x'_n t^n + \dots + x'_1 t + x'_0) = (x_n + x'_n)t + \dots + (x_1 + x'_1)t + (x_0 + x'_0),$$
- $$\lambda \cdot (x_n t^n + \dots + x_1 t + x_0) = \lambda x_n t^n + \dots + \lambda x_1 t + \lambda x_0.$$
- Prostor svih polinoma  $\mathcal{P}$  je također linearni prostor uz iste operacije.
- (Pr5) Skup  $\mathcal{F} = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}\}$  svih realnih funkcija definiranih na intervalu  $[a, b]$  je linearni prostor uz operacije
- $$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
- $$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

**Linearni potprostor.** Neka je  $(V, +, \cdot)$  linearni prostor. Podskup  $W \subset V$  čini *linearni potprostor* prostora  $V$  ako je on linearni prostor uz iste operacije koje su definirane na prostoru  $V$ . Je li neki skup linearni potprostor, možemo jednostavno provjeriti pomoću ovog važnog teorema:

! Neka je  $V$  linearni prostor. Podskup  $W \subset V$  je potprostor **akko** vrijedi

$$\alpha a + \beta b \in W, \forall a, b \in W, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Kao posljedica prethodnog teorema vrijedi: ako je  $W \subset V$  potprostor od  $V$ , onda nul-vektor  $0$  mora biti sadržan u  $W$ .

**Primjer 5.1** Provjeriti je li skup  $\mathcal{G}_3$  – skup svih gornje trokutastih kvadratnih matrica reda 3 – potprostor prostora  $\mathcal{M}_3$ .

**Rješenje.**

Neka su  $A, B$  dvije proizvoljne gornje trokutaste kvadratne matrice reda 3, i neka su  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  proizvoljni skalari. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ 0 & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ 0 & 0 & \alpha a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta b_{11} & \beta b_{12} & \beta b_{13} \\ 0 & \beta b_{22} & \beta b_{23} \\ 0 & 0 & \beta b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} & \alpha a_{13} + \beta b_{13} \\ 0 & \alpha a_{22} + \beta b_{22} & \alpha a_{23} + \beta b_{23} \\ 0 & 0 & \alpha a_{33} + \beta b_{33} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle,  $\alpha A + \beta B \in \mathcal{G}_3$ , tj. skup  $\mathcal{G}_3$  jest potprostor od  $\mathcal{M}_3$ . ■

**Linearna zavisnost i nezavisnost.** Neka je  $V$  linearni prostor nad poljem  $\mathbb{F}$ . Ako su  $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$  bilo koji vektori, a  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  po volji odabrani skalari, onda je jednoznačno određen vektor

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k \tag{5.1}$$

iz  $V$ , koji nazivamo *linearna kombinacija vektora*  $a_1, a_2, \dots, a_k$  s *koeficijentima*  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Neka je  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  **konačan** skup vektora iz  $V$ . Kažemo da je taj skup *linearno nezavisan*, ako se nul-vektor  $0 \in V$  može na **jedan jedini** način prikazati kao linearna kombinacija

vektora iz  $S$ , tj. ako iz

$$0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k \quad (5.2)$$

slijedi da je  $\alpha_i = 0$ , za sve  $i = 1, \dots, k$ . Ako pak 0 dopušta prikaz oblika (5.2), za skup  $S$  kažemo da je *linearno zavis*. Drugim riječima, skup  $S$  je linearno zavis **akko** postoji izbor skalara  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$  takav da vrijedi (5.2) i pritom je bar jedan od skalara  $\alpha_i$  različit od nule. Dodatno, kraće ćemo govoriti kako je skup  $S$  linearno nezavis ako  $0 \in V$  dopušta **samo trivijalan** prikaz pomoću vektora iz  $S$ , odnosno da je  $S$  linearno zavis ako  $0 \in V$  ima i **netrivijalnih** prikaza. Nadalje, konačan skup vektora  $S = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  iz  $V$  je linearno zavis **akko** se bar jedan od vektora iz  $S$  može prikazati kao linearna kombinacija preostalih vektora iz  $S$ .

**Primjer 5.2** Utvrditi koji je od skupova iz prostora  $\mathbb{V}^3$ :

a)  $2\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{i} + \vec{k}, \quad \vec{j} - 2\vec{k},$

b)  $\vec{i}, \quad \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$

linearno zavis, a koji linearno nezavis. Izraziti pojedini vektor iz skupa kao linearnu kombinaciju ostalih vektora, kad god je to moguće.

**Rješenje.**

a) Za vektore  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{k}, \quad \vec{c} = \vec{j} - 2\vec{k}$  vrijedi:

$$0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0},$$

$$\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{i} - 2\vec{k} - \vec{j} + 2\vec{k} = \vec{0},$$

pa je skup vektora  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  linearno zavis. Dodatno, vrijedi:

$$\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}.$$

b) Za vektore

$$\vec{a} = \vec{i}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

dobivamo  $\vec{0}$  **samo za** trivijalnu kombinaciju

$$0\vec{a} + 0\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{0},$$

pa je skup vektora  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  linearno **nezavis**.

**Dimenzija linearnog prostora.** Dimenzija linearnog prostora maksimalan je broj linearno nezavisnih vektora u tom prostoru, ili, preciznije (pažljiv čitatelj će zamijetiti da je linearna nezavisnost, odnosno zavisnost, svojstvo skupa vektora, a ne svojstvo pojedinih vektora iz tog skupa), dimenzija linearnog prostora je kardinalnost najvećeg linearno nezavisnog skupa vektora u tom prostoru. Linearna algebra bavi se **konačnodimenzijskim** prostorima. U konačnodimenzijskim prostorima broj linearno nezavisnih vektora je konačan. Područje matematike koje izučava **beskonačnodimenzijske** linearne prostore naziva se *funkcionalna analiza*.

Dodatno, dimenziju linearnog prostora standardno je definirati pomoću **baze** tog vektorskog prostora: Dimenzija vektorskog prostora je kardinalnost bilo koje baze tog prostora.

**Baza linearnog prostora.** Svaki konačnodimenzionalan linearni prostor  $V \neq \{0\}$  ima *bazu*. Baza linearnog prostora  $V$  nad poljem  $\mathbb{F}$  je svaki skup vektora  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$  koji ima sljedeća dva svojstva:

- (B1) vektori  $b_1, b_2, \dots, b_n$  su linearno nezavisni, i
- (B2) svaki drugi vektor  $v \in V$  može se napisati u obliku linearne kombinacije vektora  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Linearni prostor  $V$  može imati više različitih baza<sup>57</sup>. Na primjer, svaki skup tri linearno nezavisna vektora u  $\mathbb{V}^3$  je baza od  $\mathbb{V}^3$ . Za baze linearnih prostora vrijedi **Steinitzov**<sup>58</sup> **teorem**:

! Svake dvije baze linearnog prostora  $V \neq \{0\}$  imaju isti broj elemenata.

Taj broj je, dakle, jednak dimenziji prostora  $V$ . Mada linearni prostor ima obilje različitih baza, najčešće se u tom prostoru istakne jedna baza koja se naziva *standardna* ili *kanonska*. Standardna baza prostora  $\mathbb{V}^3$  je  $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , pa je  $\dim(\mathbb{V}^3) = 3$ . Neka je  $V$  linearni prostor nad poljem  $\mathbb{F}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$  neka baza linearnog prostora  $V$ , i  $x \in V$  bilo koji vektor iz tog prostora. Zbog svojstva (B2) postoje koeficijenti (skalari)  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ , takvi da vrijedi:

$$x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n,$$

što još zapisujemo kao:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_B,$$

i zovemo *matrični prikaz vektora  $x$  u bazi  $B$* . Očito će matrični prikaz vektora [ovisiti](#) o odabranoj bazi  $B$ .

**Primjer 5.3** Neka je  $B_1$  standardna baza vektorskog prostora  $\mathbb{V}^3$ , a  $B_2 = \{\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j}, \vec{k}\}$  i  $B_3 = \{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{j} + \vec{k}, \vec{k}\}$  dvije nestandardne baze prostora  $\mathbb{V}^3$ . Zapisati matrično vektor  $\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k} \in \mathbb{V}^3$  u bazama  $B_1, B_2$  i  $B_3$  redom.

**Rješenje.**

Vrijedi (koeficijente u rastavu  $\vec{a} = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3$  dobivamo izjednačavanjem s  $\vec{a}$  po komponentama uz  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ):

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}_{B_1},$$

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k} = 2(\vec{i} + \vec{j}) + 2(\vec{i} - \vec{j}) + 4\vec{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{B_2},$$

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{k} = 4(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) - 4(\vec{j} + \vec{k}) + 4\vec{k} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}_{B_3}.$$

<sup>57</sup> Svaki linearno nezavisan skup  $S = \{a_1, \dots, a_k\}$  u konačnodimenzionalnom prostoru  $V$  se može nadopuniti do baze.

<sup>58</sup> Ernst Steinitz, njemački matematičar, 1871.–1928.

## 5.2 Linearni operatori

**Linearni operatori.** Neka su  $U$  i  $V$  linearni prostori nad istim poljem  $\mathbb{F}$ , a  $A : U \rightarrow V$  neko preslikavanje. Kažemo kako je to preslikavanje *linearni operator* ako ima ova svojstva:

- (LO1)  $A(a + b) = A(a) + A(b), \quad \forall a, b \in U,$  (aditivnost)  
 (LO2)  $A(\alpha a) = \alpha A(a), \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}, a \in U.$  (homogenost)

Jasno je kako prethodna definicija dopušta i mogućnost  $U = V$ . Dodatno, kažemo kako operator  $A : U \rightarrow V$  ima svojstvo *linearnosti* ako za svaki  $a, b \in U$  i svaki  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  vrijedi svojstvo:

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b). \quad (5.3)$$

Lako se vidi kako je svojstvo linearnosti (5.3) ekvivalentno paru svojstava aditivnosti i homogenosti. Dakle, posve ekvivalentno linearni operator se može definirati kao preslikavanje linearnih prostora, koje ima svojstvo linearnosti (5.3).

**Kompozicija linearnih operatora.** Neka su  $F : U \rightarrow V$  i  $G : V \rightarrow W$  linearni operatori. Njihova *kompozicija* (produkt operatora)  $H = G \circ F : U \rightarrow W$  (samo u tom poretku!) je linearni operator (kompozicija čuva linearnost operatora).

**Primjer 5.4** Ispitati je li operator  $A$  linearan, ako je  $A : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  definiran pravilom  $A(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x + 2y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$ .

**Rješenje.**

Za proizvoljne vektore  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  i  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  iz prostora  $\mathbb{V}^2$ , te proizvoljni skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  vrijedi:

$$\begin{aligned} A(\vec{u} + \vec{v}) &= A(x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}) = A((x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}) \\ &= ((x + x') + 2(y + y'))\vec{i} + ((x + x') - (y + y'))\vec{j} \\ &= (x + 2y)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (x' + 2y')\vec{i} + (x' - y')\vec{j} \\ &= A(\vec{u}) + A(\vec{v}), \\ A(\alpha\vec{u}) &= A(\alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}) \\ &= (\alpha x + 2\alpha y)\vec{i} + (\alpha x - \alpha y)\vec{j} \\ &= \alpha((x + 2y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}) = \alpha A(\vec{u}). \end{aligned}$$

Dakle, zadani operator  $A$  ima svojstva aditivnosti (LO1) i homogenosti (LO2), pa je linearan! ■

**Prikaz linearnog operatora matricom.** Linearni operator, osim što se može definirati pomoću pravila preslikavanja, može se također predstaviti matricom. Neka je  $V$  linearni prostor nad poljem  $\mathbb{F}$  i  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$  neka baza linearnog prostora  $V$ . Za proizvoljni vektor  $x \in V$  vrijedi:

$$\begin{aligned} x = x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n &\Rightarrow A(x) = A(x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n) \\ &= x_1 A(b_1) + x_2 A(b_2) + \dots + x_n A(b_n). \end{aligned}$$

Dakle, djelovanje operatora je **potpuno određeno** ako su poznati  $A(b_1), A(b_2), \dots, A(b_n)$ .

Neka su  $U, V$  linearni prostori nad istim poljem, dimenzije  $n$ , odnosno  $m$ , a  $A : U \rightarrow V$  neka je linearni operator. Neka je  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq U$  baza za  $U$ , a  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\} \subseteq V$  baza za  $V$ . Vektor  $v_1 = A(e_1)$  pripada prostoru  $V$  i može se razviti po bazi  $B$ . Dakle, postoje skalari  $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{m1}$  takvi da vrijedi:

$$A(e_1) = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{21}b_2 + \dots + \alpha_{m1}b_m.$$

Slično vrijedi i za ostale vektore baze  $E$ :

$$A(e_2) = \alpha_{12}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \dots + \alpha_{m2}b_m,$$

$$\vdots$$

$$A(e_n) = \alpha_{1n}b_1 + \alpha_{2n}b_2 + \dots + \alpha_{mn}b_m.$$

Stoga je, operator  $A$  jednoznačno određen matricom:

$$A_{(E,B)} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

odnosno matricom tipa  $m \times n$ , u kojoj stupce čine komponente vektora  $A(e_1), A(e_2), \dots, A(e_n)$  po bazi  $B$ . Matricu  $A_{(E,B)}$  nazivamo *matrični zapis*, odnosno *matrični prikaz*, *matrična reprezentacija* ili, kratko, *matrica operatora*  $A$  u paru baza  $(E, B)$ .

Kompoziciji linearnih operatora odgovara matrica koja je jednaka umnošku (ulančanih) matrica pojedinih linearnih operatora.

**Primjer 5.5** Ispitati je li **operator simetrije** (u ravnini) s obzirom na os apscisa linearan, i ako jeste, odrediti matrični prikaz tog operatora u paru kanonskih baza  $(B_1, B_1)$ .

**Rješenje.**

Operator simetrije (u ravnini) s obzirom na os apscisa proizvoljnom vektoru  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \in \mathbb{V}^2$  pridružuje vektor  $A(\vec{u}) = x\vec{i} - y\vec{j} \in \mathbb{V}^2$ . Ovaj operator je linearan, jer vrijedi:

$$\begin{aligned} A(\vec{u} + \vec{v}) &= A(x\vec{i} + y\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}) = A((x+x')\vec{i} + (y+y')\vec{j}) \\ &= (x+x')\vec{i} - (y+y')\vec{j} = x\vec{i} - y\vec{j} + x'\vec{i} - y'\vec{j} \\ &= A(\vec{u}) + A(\vec{v}), \\ A(\alpha\vec{u}) &= A(\alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j}) \\ &= \alpha x\vec{i} - \alpha y\vec{j} = \alpha(x\vec{i} - y\vec{j}) \\ &= \alpha A(\vec{u}). \end{aligned}$$

Nadalje, za vektore kanonske baze  $B_1$  prostora  $\mathbb{V}^2$  vrijedi  $A(\vec{i}) = \vec{i}$  i  $A(\vec{j}) = -\vec{j}$ . Dakle, za matrični prikaz operatora simetrije s obzirom na os apscisa, u paru kanonskih baza vrijedi:

$$A_{(B_1, B_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$



**Odnos matricnih zapisa istog operatora.** Neka je  $A : U \rightarrow V$  linearni operator,  $A_{(E,B)}$  matrica tog operatora u paru baza  $(E, B)$ , a  $A'_{(E',B')}$  matrica istog operatora u paru baza  $(E', B')$ . Za matricne zapise istog linearnog operatora u različitim parovima baza vrijedi sljedeća relacija:

$$A'_{(E',B')} = T^{-1}A_{(E,B)}S, \quad (5.5)$$

gdje je  $S$  matrica prijelaza  $E \rightarrow E'$ , a  $T$  matrica prijelaza  $B \rightarrow B'$ .

Matrični zapisi  $A_{(E,B)}$  i  $A'_{(E',B')}$  istog linearnog operatora  $A : U \rightarrow V$  u različitim parovima baza su ekvivalentne matrice,  $A'_{(E',B')} \sim A_{(E,B)}$ . U posebnom slučaju, odnosno kad je  $U = V$ , dakle  $A : V \rightarrow V$ , matrice  $A_{(B,B)}$  i  $A'_{(B',B')}$  tog operatora u bazama  $B \subseteq V$ , odnosno  $B' \subseteq V$ , su vezane relacijom:

$$A'_{(B',B')} = T^{-1}A_{(B,B)}T. \quad (5.6)$$

Stoga su, matrični zapisi  $A_{(B,B)}$  i  $A'_{(B',B')}$  istog linearnog operatora  $A : V \rightarrow V$ , u različitim bazama prostora  $V$ , slične matrice,  $A'_{(B',B')} \simeq A_{(B,B)}$ .

**Primjer 5.6** Ako je linearni operator  $A$  u standardnoj bazi  $B_1$  prikazan matricom:

$$A_{(B_1,B_1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

odrediti matricu  $A_{(B_2,B_2)}$  tog operatora u bazi  $B_2 = \{\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}, -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}\}$ .

**Rješenje.**

Matrica prijelaza iz baze  $B_1$  u bazu  $B_2$  je:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -5 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, vrijedi:

$$A_{(B_2,B_2)} = T^{-1}A_{(B_1,B_1)}T = \begin{bmatrix} 13 & -2 & -5 \\ -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$



### 5.3 Algebra operatora

U prethodnom odjeljku definirali smo kompoziciju linearnih operatora. U fokusu ovog odjeljka bit će pojmovi bijektivnosti i inverza operatora, uz bitnu napomenu kako ćemo razmatrati samo operatore  $A : V \rightarrow V$  kojima su domena i kodomena **isti** linearni prostor  $V$ . U slučaju da su linearni, ovakvi operatori se mogu prikazati **kvadratnim** matricama.

**Regularni operatori.** Linearni operator  $A : V \rightarrow V$  je **bijekcija** **akko** je matrica operatora  $A$  **regularna**. Bijektivne linearne operatore još nazivamo **regularnim operatorima**. Linearni operator koji **nije** bijekcija nazivamo **singularnim operatorom**.

**Inverz linearnog operatora.** Neka je  $A : V \rightarrow V$  linearni operator na linearnom prostoru  $V$ . Kažemo da  $A$  ima *inverz* (ili da je *invertibilan*), ako postoji linearni operator  $A^{-1} : V \rightarrow V$  takav da vrijedi:

$$A^{-1} \circ A = \text{id}_V \quad \text{i} \quad A \circ A^{-1} = \text{id}_V,$$

gdje je  $\text{id}_V$  *identični operator* na prostoru  $V$ , tj.  $\text{id}_V(v) = v$  za svaki  $v \in V$ . Dodatno, identični operator na nekom linearnom prostoru  $V$  je trivijalan primjer invertibilnog operatora. Nije teško dokazati kako je linearni operator  $A : V \rightarrow V$  invertibilan **akko** je determinanta matrice operatora  $A$  **različita** od nule, kao i da je matrica inverznog operatora  $A^{-1} : V \rightarrow V$  jednaka inverzu matrice operatora  $A$ .

U sljedećem odjeljku pokazat ćemo kako pronaći takvu bazu prostora  $V$  u kojoj će matrica operatora  $A : V \rightarrow V$  biti čim jednostavnija. U tom cilju definirat ćemo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora  $A$ . Ranije smo (u odjeljku 3.7) spomenuli kako se problem svojstvenih vrijednosti operatora može reducirati na problem svojstvenih vrijednosti matrica (pridruženih tim operatorima). Ovdje ćemo još istaknuti kako za regularan linearni operator  $A$ , njegov inverz  $A^{-1}$ , te za njihove svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore vrijede sljedeća svojstva:

- ! Ako je  $\lambda$  svojstvena vrijednost operatora  $A$  onda je  $\lambda^{-1}$  svojstvena vrijednost operatora  $A^{-1}$ ;
- ! Pripadajući svojstveni vektori su isti.

**Primjer 5.7** Ako postoji, odrediti inverz linearnog operatora zadanog formulom:

$$L(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$$

u prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

**Rješenje.**

Slike baznih vektora su vektori  $L(1, 0, 0) = (2, 4, 2)$ ,  $L(0, 1, 0) = (0, -1, 3)$  i  $L(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$ , pa za determinantu matrice zadanog operatora  $L$  vrijedi:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 2 \neq 0.$$

Dakle, zadani operator  $L$  je invertibilan. Nadalje, neka je  $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$  proizvoljan. Vrijedi:

$$L^{-1}(u, v, w) = (x, y, z) \quad \Leftrightarrow \quad L(x, y, z) = (u, v, w) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z),$$

odnosno

$$x = \frac{u}{2}, \quad y = 2u - v, \quad z = 7u - 3v - w.$$

Konačno, formula za inverz zadanog linearnog operatora  $L$  je:

$$L^{-1}(u, v, w) = \left(\frac{u}{2}, 2u - v, 7u - 3v - w\right).$$



## 5.4 Spektar operatora

Nije teško zaključiti kako bi najjednostavniji matični zapis nekog linearnog operatora  $A : V \rightarrow V$ , u

nekoj bazi  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  prostora  $V$ , bio u obliku **dijagonalne** matrice:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Razlog je evidentan: Ako je matrica dijagonalna, njezin rang, determinanta, trag, inverz (ako postoji) ili bilo koji drugi podatak očiti su i **bez** računa.

Po definiciji matičnog zapisa linearnog operatora odmah vidimo kako je dijagonalan matični zapis u bazi  $B$  ekvivalentan sustavu jednakosti:

$$Ab_1 = \lambda_1 b_1, Ab_2 = \lambda_2 b_2, \dots, Ab_n = \lambda_n b_n.$$

Dakle, vektori baze  $b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), u ovoj situaciji imaju osobito svojstvo:

! Operator  $A$  preslikava vektore baze  $B$  u njima kolinearne vektore.

To nas vodi na ideju da općenito, za dani linearni operator, razmotrimo egzistenciju, metode pronalaženja i svojstva takvih vektora.

**Svojstvene vrijednosti i spektar.** Neka je  $V$  linearni prostor nad poljem  $\mathbb{F}$  i  $A : V \rightarrow V$  linearan operator. Kaže se da je skalar  $\lambda_0 \in \mathbb{F}$  *svojstvena vrijednost* operatora  $A$  ako postoji vektor  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , takav da je  $A(v) = \lambda_0 v$ . Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora  $A$  naziva se *spektar* (operatora  $A$ ) i označava sa  $\sigma(A)$ . Vektor  $v$  iz gornje definicije naziva se *svojstveni vektor* pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_0$ . Treba primijetiti kako svojstveni vektor **nikako** nije jedinstven:

! ako je  $v$  svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti  $\lambda_0$  onda je i  $\mu v$  svojstveni vektor pridružen istoj svojstvenoj vrijednosti, i to za svaki skalar  $\mu$  iz polja  $\mathbb{F}$ ,  $\mu \neq 0$ .

Štoviše, neka svojstvena vrijednost  $\lambda_0$  operatora  $A$  može posjedovati i više linearno nezavisnih svojstvenih vektora.

Premda svojstveni vektor (po definiciji) mora biti različit od nul-vektora, svojstvena vrijednost može biti jednaka nuli. Posebno, 0 je svojstvena vrijednost operatora  $A$  **akko** je  $A$  singularan.

**Karakteristična jednadžba i karakteristični polinom.** Nije teško uočiti kako se jednakost  $A(v) = \lambda v$  može, u odabranoj bazi, matično zapisati s (operator i njegovu matricu u odabranoj bazi označavamo istim slovom  $A$ )

$$Av = \lambda v, \quad \text{odnosno} \quad (A - \lambda I)v = 0.$$

Dakle, svojstveni vektori linearnog operatora  $A$  su netrivialna rješenja  $v$  homogenog sustava  $(A - \lambda I)v = 0$ . Obzirom da je sustav **homogen**, netrivialno rješenje postoji **akko** je matrica sustava  $A - \lambda I$  singularna, tj. ako vrijedi

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Ova jednadžba se zove *karakteristična jednadžba* operatora  $A$ . Tražene svojstvene vrijednosti su dakle rješenja karakteristične jednadžbe. Može se pokazati kako je lijeva strana karakteristične jednadžbe, tj izraz  $\det(A - \lambda I)$ , polinom u varijabli  $\lambda$  kojeg nazivamo *karakteristični polinom* operatora  $A$ . Karakteristični polinom i svojstvene vrijednosti operatora **ne** ovise o odabiru baza. Dodatno, stupanj karakterističnog polinoma jednak je redu  $n$  kvadratne matrice  $A$ . Za postupak određivanja (pronalaženja) svojstvenih vrijednosti i vektora nekog operatora vidi Primjer 5.8.

**Primjer 5.8** Neka je operator  $A$  zadan matricom:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Naći svojstvene vrijednosti i vektore operatora  $A$ .

**Rješenje.**

Prvo rješavamo karakterističnu jednažbu  $\det(A - \lambda I) = 0$  čija rješenja su svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$  operatora  $A$ . Vrijedi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 0 \\ 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = -(4 + \lambda)(4 - \lambda).$$

Dakle, operator  $A$  ima dvije svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = -4$  i  $\lambda_2 = 4$ . Nadalje, za svaku svojstvenu vrijednost  $\lambda_i$  tražimo rješenje  $v$  sustava  $(A - \lambda_i I)v = 0$  koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost  $\lambda_i$ .

Stoga, za  $\lambda_1 = -4$  rješavamo **homogeni** sustav:

$$(A + 4I)v = 0,$$

i dobivamo prvi svojstveni vektor  $v_1 = [8, -1]^T$ .

Slično, za  $\lambda_2 = 4$  rješavamo **homogeni** sustav:

$$(A - 4I)v = 0,$$

i dobivamo drugi svojstveni vektor  $v_2 = [0, 1]^T$ .



**Dijagonalizacija operatora.** Neka je  $A : V \rightarrow V$  linearni operator na linearnom prostoru  $V$ . Svojstveni vektori operatora  $A$  koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima međusobno su linearno nezavisni. Posljedica ove osobine svojstvenih vektora je:

! Ako su sve nul-točke karakterističnog polinoma različite, tad postoji baza prostora  $V$  koju čine svojstveni vektori promatranog operatora  $A$ .

Dakle, linearni operator  $A : V \rightarrow V$  dopušta *dijagonalizaciju* **akko** u prostoru  $V$  postoji baza koja se sastoji od svojstvenih vektora tog operatora. Shodno tome, ako linearni operator  $A : V \rightarrow V$  ima  $n$  različitih svojstvenih vrijednosti, gdje je  $n = \dim(V)$ , onda operator  $A$  dopušta dijagonalizaciju. Dodatno, ako operator  $A$  dopušta dijagonalizaciju, onda je njegov dijagonalni matični zapis u bazi koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora, a elementi na glavnoj dijagonali matrice su svojstvene vrijednosti tog operatora.

Konačno, najopćenitija tvrdnja (egzistencijalne prirode – tj. temeljem koje možemo **samo** zaključiti postoji li baza svojstvenih vektora za promatrani operator) kojom se karakteriziraju linearni operatori koji se mogu dijagonalizirati je:

! Da bi operator dopuštao dijagonalizaciju, nužno je i dovoljno da se njegov **minimalni polinom** (tj. polinom najnižeg stupnja, s koeficijentima iz polja  $\mathbb{F}$ , kojeg matrica operatora poništava) može prikazati kao produkt **međusobno različitih linearnih** faktora s koeficijentima iz polja  $\mathbb{F}$ .

**Primjer 5.9** Ispitati dopušta li dijagonalizaciju operator  $A$  zadan matricom:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix},$$

i ako dopušta, odrediti dijagonalni matrični zapis tog operatora u bazi koja se sastoji od svojstvenih vektora tog operatora.

**Rješenje.**

Ponovno, prvo rješavamo karakterističnu jednažbu  $\det(A - \lambda I) = 0$  čija rješenja su svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$  operatora  $A$ . Vrijedi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 - \lambda & 2 \\ -3 & -6 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = -\lambda(2 + \lambda)(3 + \lambda).$$

Dakle, operator  $A$  ima tri različite svojstvene vrijednosti  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -2$  i  $\lambda_3 = -3$ .

Nadalje, za svaku svojstvenu vrijednost  $\lambda_i$  tražimo rješenje  $v$  sustava  $(A - \lambda_i I)v = 0$  koje je svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost  $\lambda_i$ .

Stoga, za  $\lambda_1 = 0$  rješavamo homogeni sustav:  $(A - 0I)v = 0$ ,

i dobivamo prvi svojstveni vektor  $v_1 = [0, 1, -1]^T$ .

Slično, za  $\lambda_2 = -2$  rješavamo homogeni sustav:  $(A + 2I)v = 0$ ,

i dobivamo drugi svojstveni vektor  $v_2 = [2, -1, 0]^T$ .

Konačno, za  $\lambda_3 = -3$  rješavamo homogeni sustav:  $(A + 3I)v = 0$ ,

i dobivamo treći svojstveni vektor  $v_3 = [1, 0, -1]^T$ .

Sada, nije teško pokazati da su ova tri svojstvena vektora linearno nezavisna, pa zadani operator  $A$  dopušta dijagonalizaciju. Nju provodi matrica:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Konačno, traženi dijagonalni matrični zapis nalazimo kao (na glavnoj dijagonali "čitamo" svojstvene vrijednosti, koje smo i prije dobili):

$$D = T^{-1}AT = \dots = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$



U prethodnom smo primjeru vidjeli da je linearni operator  $A$  (zadan matricom reda 3) s tri međusobno različite svojstvene vrijednosti uvijek dopušta dijagonalizaciju, jer mu svaka svojstvena

vrijednost osigurava po jedan pripadajući, linearno nezavisan svojstveni vektor. Međutim, postavlja se pitanje, što se događa kada karakteristični polinom operatora  $A$  ima **višestruk** korijene.

U takvim situacijama, samo postojanje svojstvenih vrijednosti nije jamstvo da zadani operator dopušta dijagonalizaciju. Ključni kriterij postaje **ukupan broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora** koje operator može generirati. Naime, vrijedi:

! Ako linearni operator  $A: V \rightarrow V$  nema  $n$  linearno nezavisnih svojstvenih vektora, gdje je  $n = \dim V$ , onda se operator  $A$  ne može dijagonalizirati<sup>59</sup>.

U nastavku ćemo kroz primjer operatora zadanog matricom reda 3 s dvostrukom svojstvenom vrijednošću, demonstrirati kako “manjak” linearno nezavisnih svojstvenih vektora onemogućuje njegovu dijagonalizaciju.

**Primjer 5.10** Ispitati dopušta li dijagonalizaciju operator  $A$  zadan matricom:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} ?$$

**Rješenje.**

Još jednom, prvo rješavamo karakterističnu jednažbu:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

čija rješenja su svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$  operatora  $A$ . Vrijedi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = (2 - \lambda)(3 - \lambda)^2.$$

Dakle, operator  $A$  **nema** tri različite svojstvene vrijednosti: svojstvena vrijednost  $\lambda_1 = 2$  je **jednostruka**, dok je svojstvena vrijednost  $\lambda_2 = 3$  **dvostruka**.

Za  $\lambda_1 = 2$  rješavamo **homogeni** sustav:  $(A - 2I)v = 0$ ,  
i dobivamo prvi svojstveni vektor  $v_1 = [0, 1, 0]^T$ .

Slično, za  $\lambda_2 = 3$  rješavamo **homogeni** sustav:  $(A - 3I)v = 0$ ,  
i dobivamo još samo **jedan** svojstveni vektor  $v_2 = [0, 0, 1]^T$ .

Na koncu, nije teško pokazati da su ova dva svojstvena vektora linearno nezavisna. Stoga,

linearni operator  $A$  zadan matricom  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  **ne dopušta** dijagonalizaciju jer nema  $n$   
(u ovom slučaju 3) linearno nezavisna svojstvena vektora.



<sup>59</sup> Takav operator još nazivamo **defektnim** (manjkavim).

## 5.5 Primjeri operatora u ravnini i prostoru

Ne baš tako kratak uvod u linearne prostore i linearne operatore završit će navođenjem nekih primjera linearnih operatora u ravnini i prostoru, koji se često javljaju u praksi. Svaka pripadajuća matrica odnosit će se na kanonske baze u  $\mathbb{V}^2$  odnosno  $\mathbb{V}^3$ .

**Simetrija ravnine obzirom na os  $x$ .** Neka je  $Z : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  preslikavanje ravnine definirano s  $Z(\vec{u}) = \vec{u}'$ , pri čemu je  $\vec{u}'$  vektor simetričan vektoru  $\vec{u}$  obzirom na os  $x$ . U Primjeru 5.5 je dokazano kako je ovo preslikavanje linearan operator, te da za njegov matrični prikaz imamo:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Simetrija ravnine obzirom na os  $y$ .** Na sličan način dolazimo do matričnog prikaza operatora simetrije ravnine obzirom na os  $y$ , odnosno:  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

**Simetrija ravnine obzirom na pravac  $p$ .** Neka je  $p$  pravac u ravnini koji prolazi ishodištem, a s osi apscisa zatvara kut  $\varphi$ . Za matricu koja odgovara operatoru simetrije (u ravnini) obzirom na pravac  $p$  vrijedi:  $\begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$ .

**Operator centralne simetrije u ravnini.** Centralna simetrija u ravnini, odnosno preslikavanje  $C : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  definirano s  $C(\vec{u}) = -\vec{u}$ , je linearni operator i ima matrični zapis:  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Rotacija ravnine oko ishodišta za kut  $\alpha$ .** Neka je  $R : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  preslikavanje ravnine definirano s  $R(\vec{u}) = \vec{u}'$ , pri čemu je  $\vec{u}'$  vektor dobiven rotacijom vektora  $\vec{u}$  za kut  $\alpha$ . Iz geometrijskih razloga jasno je kako je ovo preslikavanje linearan operator. Matricu operatora  $R$  dobivamo iz djelovanja operatora na baznim vektorima. Vrijedi:  $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ .

**Operator homotetije u ravnini.** Neka je  $H : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  preslikavanje ravnine definirano s  $H(\vec{u}) = \vec{u}'$ , pri čemu je  $\vec{u}'$  vektor dobiven *rastezanjem* vektora  $\vec{u}$  duž osi  $x$  za faktor  $\lambda$ . Tako definirano preslikavanje naziva se *homotetija ravnine*. Iz geometrijskih razloga jasno je kako je ovo preslikavanje također linearan operator. Pritom, matricu operatora  $H$  dobivamo iz djelovanja operatora na baznim vektorima. Vrijedi:  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Na sličan način dolazimo do matričnog prikaza

operatora rastezanja vektora duž osi  $y$  za  $\mu$ , odnosno:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ . Dakle, operator definiran matricom  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$  predstavlja rastezanje duž **obje** osi, redom za faktore  $\lambda$  i  $\mu$ !

**Operator zakošenja u ravnini.** Neka je  $S : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  preslikavanje ravnine definirano s  $S(\vec{u}) = \vec{u}'$ , pri čemu je  $\vec{u}'$  vektor dobiven *zakošenjem* (*smicanjem*) vektora  $\vec{u}$  duž osi  $x$  ili osi  $y$  za faktor  $\varepsilon$ . Tako definirana preslikavanja nazivaju se redom *horizontalno smicanje* odnosno *vertikalno smicanje*. Iz geometrijskih razloga, još jednom je jasno kako su oba preslikavanja linearni operatori, pri čemu matrice operatora  $S$  također dobivamo iz djelovanja operatora na baznim vektorima.

Vrijedi:  $\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , odnosno  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix}$ .

Posve analogno mogu se definirati operatori simetrije u prostoru, rotacije obzirom na os (u prostoru), zakošenja, homotetije duž osi (u prostoru), itd.

**Simetrija prostora obzirom na os  $x$ .** Ova simetrija je linearni operator  $Z_x : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Simetrija prostora obzirom na os  $y$ .** Ova simetrija je linearni operator  $Z_y : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Simetrija prostora obzirom na os  $z$ .** Ova simetrija je linearni operator  $Z_z : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Simetrija prostora obzirom na koordinatnu ravninu  $xy$ .** Ova simetrija je linearni operator  $Z_{xy} : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Rotacija prostora oko osi  $x$  za kut  $\alpha$ .** Ova rotacija je linearni operator  $R_x : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

**Rotacija prostora oko osi  $y$  za kut  $\alpha$ .** Ova rotacija je linearni operator  $R_y : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

**Rotacija prostora oko osi  $z$  za kut  $\alpha$ .** Ova rotacija je linearni operator  $R_z : \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbb{V}^3$  određen s:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 5.6 Zadaci

**Zadatak 5.1** Je li skup:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 5x\}$$

potprostor vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$ ? Ako tvrdnja vrijedi tada je treba dokazati, u suprotnom pokazati protuprimjerom da ne vrijedi.

**Komentar.**

Skup  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 5x\}$  je potprostor vektorskog prostora  $\mathbb{R}^3$ .

**Zadatak 5.2** Je li skup vektora:

$$\{(1, 2, 3, 4), (3, -1, 2, 5), (4, 1, 5, 0)\}$$

linearno nezavisan u prostoru  $\mathbb{R}^4$ ?

**Komentar.**

Skup vektora  $\{(1, 2, 3, 4), (3, -1, 2, 5), (4, 1, 5, 0)\}$  je linearno nezavisan u prostoru  $\mathbb{R}^4$ .

**Zadatak 5.3** Pokazati da je skup  $S$  koji se sastoji od vektora:

$$(0, 1, 1), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 0)$$

jedna baza za  $\mathbb{R}^3$ .

**Komentar.**

Skup  $S$  jedna je baza za  $\mathbb{R}^3$ , jer je 3 dimenzija prostora  $\mathbb{R}^3$ , a skup  $S$  je linearno nezavisan skup (detalje prepuštamo čitatelju) kardinalnosti 3.

**Zadatak 5.4** Je li skup  $S = \{(1, i, 1 + i), (i, 0, i), (1, 1, 1)\}$  baza prostora  $\mathbb{C}^3$ .

**Komentar.**

Skup od 3 vektora u  $\mathbb{C}^3$  (prostoru dimenzije 3) čini bazu **akko** je taj skup linearno nezavisan.

Skup  $S = \{(1, i, 1 + i), (i, 0, i), (1, 1, 1)\}$  je linearno nezavisan  $\Rightarrow S$  je baza linearnog prostora  $\mathbb{C}^3$ .

**Zadatak 5.5** Ispitati čini li skup vektora  $S = \{(1, 2, 0, 3), (0, -1, 2, 2), (2, 1, -1, 0), (3, 4, -3, 1)\}$  bazu za  $\mathbb{R}^4$ .

**Komentar.**

Skup od 4 vektora u  $\mathbb{R}^4$  (prostoru dimenzije 4) čini bazu **akko** je taj skup linearno nezavisan.

Skup  $S = \{(1, 2, 0, 3), (0, -1, 2, 2), (2, 1, -1, 0), (3, 4, -3, 1)\}$  **nije** linearno nezavisan  $\Rightarrow S$  **nije** baza linearnog prostora  $\mathbb{R}^4$ .

**Zadatak 5.6** Je li skup  $S$  koji se sastoji od matrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{baza za } \mathcal{M}_{22}?$$

**Rješenje.**

Dimenzija linearnog prostora  $\mathcal{M}_{22}$  je 4 pa je dovoljno provjeriti je li zadani četveročlani skup  $S$  linearno nezavisan. Pretpostavimo da postoji netrivijalan prikaz nul–matrice pomoću zadanih četiriju matrica (elemenata skupa  $S$ ):

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_4 A_4 = 0,$$

odnosno da vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\alpha_2 & 3\alpha_2 \\ -2\alpha_2 & -2\alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & 4\alpha_3 \\ -5\alpha_3 & -\alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_4 & 4\alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbrajanjem matrica na lijevoj strani i izjednačavanjem odgovarajućih elemenata na lijevoj i desnoj strani dobivamo linearni sustav:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 - 5\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ -2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je jednoparametarsko (detalje prepuštamo čitatelju):

$$\alpha_1 = 4t, \quad \alpha_2 = -\frac{12}{11}t, \quad \alpha_3 = t, \quad \alpha_4 = -\frac{13}{11}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, postoji netrivijalan prikaz nul–matrice  $0$ , pa je skup  $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  linearno zavisn i ne tvori bazu za  $\mathcal{M}_{22}$ . ■

**Zadatak 5.7** Ispitati jesu li stupci matrice  $A$  baza prostora  $\mathbb{R}^3$ , ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Rješenje.**

Stupci matrice  $A$  nisu linearno nezavisni, jer postoji netrivijalna linearna kombinacija koja daje nul–stupac. Dakle, stupci matrice  $A$  ne čine bazu prostora  $\mathbb{R}^3$ . ■

**Zadatak 5.8** Dokazati da je skup  $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$  jedna baza za prostor  $\mathcal{P}_3$ . Zatim, rastaviti polinome  $p(t) = t^3 - 4t^2 + 8t - 3$  i  $q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$  u toj bazi.

**Rješenje.**

Uz oznake  $p_0(t) = 1$ ,  $p_1(t) = t-1$ ,  $p_2(t) = (t-1)^2$ ,  $p_3(t) = (t-1)^3$  vrijedi:

$$\begin{aligned} p(t) &= 2p_0(t) + 3p_1(t) - p_2(t) + p_3(t), \\ q(t) &= (d+c+b+a)p_0(t) + (c+2b+3a)p_1(t) + (b+3a)p_2(t) + ap_3(t). \end{aligned}$$
■

**Zadatak 5.9** Zapisati matrično vektor normale ravnine  $\pi \dots 4x + 4z + 25 = 0$  u bazi

$$B = \{\vec{k} \times \vec{a}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{k}\} \subseteq \mathbb{V}^3,$$

gdje su  $\vec{a} = (1, -1, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, 0)$  i  $\vec{c} = (1, 1, 1)$ .

**Rješenje.**

Za vektor normale zadane ravnine vrijedi:  $\vec{n} = (4, 0, 4) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_B$ .

**Zadatak 5.10** Vektor  $\vec{a} \in \mathbb{V}^3$  u kanonskoj bazi  $B_1 = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  ima prikaz  $\vec{a} = 6\vec{i} + 9\vec{j} + 14\vec{k}$ . Odrediti prikaz vektora  $\vec{a}$  u bazi  $B_2 = \{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{B_2}$ ,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ , gdje je  $T$  matrica prijelaza iz baze  $B_1$  u bazu  $B_2$ .

**Zadatak 5.11** Linearni operator  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  u bazi  $F = \{f_1 = (1, 2), f_2 = (1, 1)\}$  zadan je matričnim zapisom

$$A_{(F,F)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite njegov matrični zapis  $A_{(G,G)}$  u bazi  $G = \{g_1, g_2\}$ , gdje su  $g_1 = (2, 3)$ ,  $g_2 = (0, 1)$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $A_{(G,G)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , gdje je  $T$  matrica prijelaza iz baze  $F$  u bazu  $G$ .

**Zadatak 5.12** Ispitati je li operator  $A$  linearan, ako je

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ definiran pravilom } A(x, y) = (x + y^2, xy).$$

**Rješenje.**

Zadani operator  $A$  nije linearan.

**Zadatak 5.13** Neka je  $p$  pravac u ravnini koji prolazi ishodištem i koji ima jednadžbu  $y = kx$ . Odrediti eksplicitne formule za sljedeća preslikavanja, te dokazati da su to linearni operatori:

- $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pri čemu je  $P(x, y)$  projekcija točke  $(x, y)$  na pravac  $p$ ;
- $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , pri čemu su  $Z(x, y)$  i  $(x, y)$  osno simetrične (zrcalne) točke s obzirom na pravac  $p$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\text{a) } P(x, y) = \frac{1}{k^2 + 1} (x + ky, k(x + ky)),$$

b)  $Z(x, y) = 2P(x, y) - (x, y) = \frac{1}{k^2 + 1}((1 - k^2)x + 2ky, 2kx + (k^2 - 1)y).$

Oba preslikavanja su linearni operatori.

**Zadatak 5.14** Matrica  $M = \begin{bmatrix} 2 & b \\ c & d \end{bmatrix}$  predstavlja linearnu transformaciju koja vektore pravca  $y = -4x$  preslikava tako da im promjeni orijentaciju te im udvostruči duljinu. Odrediti matricu  $M$  ako je poznato da je jedna njezina svojstvena vrijednost jednaka 1.

**Rješenje.**

Matrica zadane linearne transformacije je:  $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$

**Zadatak 5.15** Zadani su vektori  $\vec{u} = (1, 0, 2)$  i  $\vec{v} = (2, 3, 0)$ . Naći  $3 \times 3$  matricu  $A$  takvu da je za svaki vektor  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$

$$A\vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}.$$

**Rješenje.**

Vrijedi:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$

**Zadatak 5.16** U kanonskoj bazi  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  odrediti matrični prikaz linearnog operatora  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  zadanog s  $L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3 + 2x_4, x_1 - x_3, 2x_4)$ . Zatim, odrediti matrični prikaz operatora  $L$  u bazi  $B' = \{b_1 - b_2, b_2, b_2 - b_3, b_2 + b_4\}$ .

**Rješenje.**

Za matrični prikaz operatora  $L$  u kanonskoj bazi  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ , dovoljno je izračunati slike baznih vektora  $L(b_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) i zapisati ih kao stupce matrice. Vrijedi:

$$\begin{aligned} L(b_1) &= L(1, 0, 0, 0) = (1, 0, 1, 0), \\ L(b_2) &= L(0, 1, 0, 0) = (-1, 0, 0, 0), \\ L(b_3) &= L(0, 0, 1, 0) = (0, 1, -1, 0), \\ L(b_4) &= L(0, 0, 0, 1) = (0, 2, 0, 2). \end{aligned}$$

Dakle, matrični prikaz operatora  $L$  u kanonskoj bazi  $B$  je:

$$L_{(B,B)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, matrični prikaz operatora  $L$  u bazi  $B'$  je (detalje prepuštamo čitatelju):

$$L_{(B',B')} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.17** Neka je  $D : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  operator deriviranja na skupu svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3.

$$D(p) = p'.$$

Odrediti matricu operatora  $D$  u bazi  $\{1, 1+t, (1+t)^2, 1+t^3\}$ .

**Rješenje.**

Matrica operatora deriviranja  $D$  u zadanoj bazi je:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.18** Odrediti matricu operatora  $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  zadanog s:

$$S(x, y, z) = \begin{bmatrix} x-y & y-z \\ z-x & x+y+z \end{bmatrix}$$

u kanonskom paru baza.

**Rješenje.**

Kanonska baza prostora  $\mathbb{R}^3$  je skup  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ , a kanonska baza prostora  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  je skup  $E = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ , gdje je  $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Vrijedi:

$$S(1, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = E_1 - E_3 + E_4,$$

$$S(0, 1, 0) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E_1 + E_2 + E_4,$$

$$S(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -E_2 + E_3 + E_4.$$

Dakle, matrica zadanog operatora  $S$  u paru kanonskih baza  $(B, E)$  je:

$$S_{(B,E)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.19** Zadana je matrica  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  operatora  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  u paru baza  $(B', E')$ ,

$B' = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ ,  $E' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ . Odrediti  $A(x_1, x_2, x_3)$  za proizvoljan  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$A(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.20** Zadani su operatori

$$F(x, y) = (x + y)\vec{i} + (x - 2y)\vec{j} \quad \text{ i } \quad G(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x + y) + (y + z)t + (x + z)t^2.$$

Odrediti matricu operatora  $H = G \circ F$ !

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$\left. \begin{array}{l} F(1, 0) = \vec{i} + \vec{j} \\ F(0, 1) = \vec{i} - 2\vec{j} \end{array} \right\} \Rightarrow F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\left. \begin{array}{l} G(\vec{i}) = 1 + t^2 \\ G(\vec{j}) = 1 + t \end{array} \right\} \Rightarrow G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, vrijedi:

$$H = GF = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.21** Dokazati da su operatori  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  zadani kao

$$F(x, y, z) = (z + y, x + z, x + y), \quad G(x, y, z) = (x + y + z, 2x - 3y)$$

linearni operatori. Naći matrice operatora  $F$ ,  $G$ ,  $G \circ F$  u kanonskoj bazi.

**Rješenje.**

$F$ ,  $G$  i  $G \circ F$  su linearni operatori. Matrice ovih operatora u kanonskoj bazi su:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad GF = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.22** Zadan je operator  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  matricom  $F_{(B', B')} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  u nekanonskoj

bazi  $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ , te operator  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  matricom  $G_{(E', B)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

u paru kanonske baze  $B$  za prostor  $\mathbb{R}^3$  i baze  $E' = \{1, 1-t, 1+t^2\}$  za prostor  $\mathcal{P}_2$ . Odrediti matricu produkta operatora  $GF$  u paru kanonskih baza!

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$GF_{(E, B)} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.23** Transformacija ravnine  $A$  dobivena je kompozicijom tri preslikavanja: **prvo** rotira svaki vektor za  $90^\circ$  oko ishodišta u pozitivnom smjeru, **drugo** svakom vektoru prepolavlja prvu koordinatu i udvostručuje drugu koordinatu, a **treće** rotira svaki vektor za  $45^\circ$  oko ishodišta u negativnom smjeru. Odrediti matricni zapis transformacije  $A$ , izračunati determinantu ove matrice, i odrediti njezine svojstvene vrijednosti.

**Rješenje.**

Vrijedi:  $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ,

$$A = A_3 \cdot A_2 \cdot A_1 = \dots = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \quad \text{i} \quad \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \frac{5\sqrt{2}}{4}\lambda + 1.$$

Matrica  $A$  nema realnih svojstvenih vrijednosti.

**Zadatak 5.24** Utvrditi je li operator  $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  zadan s

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$$

regularan operator.

**Rješenje.**

Zadani operator  $A$  je regularan operator (matrica tog operatora je invertibilna).

**Zadatak 5.25** Ispitati je li operator  $A : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  definiran pravilom

$$A(x\vec{i} + y\vec{j}) = (x - 2y)\vec{i} + (3y - x)\vec{j}$$

regularan operator. Ako jest, odrediti njegov inverzni operator.

**Rješenje.**

Determinanta matrice zadanog operatora  $A$  je različita od nule, pa je ovaj operator regularan. Pravilo preslikavanja inverznog operatora je:

$$A^{-1}(x\vec{i} + y\vec{j}) = (3x + 2y)\vec{i} + (x + y)\vec{j}.$$

**Zadatak 5.26** Je li  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  matrica centralne simetrije  $x \mapsto -x$  u  $\mathbb{R}^3$ ?

**Rješenje.**

Zadana matrica predstavlja centralnu simetriju s obzirom na koordinatni početak u prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

**Zadatak 5.27** Odrediti vektore u  $\mathbb{R}^3$  dobivene rotacijama vektora  $(1, 1, 1)$  redom za kutove  $0, \frac{\pi}{2}, \pi$  i  $\frac{3\pi}{2}$  oko  $z$ -osi.

**Rješenje.**

Traženi vektori redom su:  $(1, 1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, 1)$ .

**Zadatak 5.28** Odrediti jednadžbu pravca koji se dobiva rotacijom pravca

$$p \dots \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1, t \in \mathbb{R} \\ z = 2t + 1 \end{cases}$$

oko osi  $x$  za kut  $\pi/4$ .

**Rješenje.**

Za rotirani pravac vrijedi:

$$p' \dots \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -\sqrt{2}t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 2\sqrt{2}t \end{cases}$$

**Zadatak 5.29** Odrediti udaljenost sjecišta ravnine  $\pi \dots 2x - 2y + z - 3 = 0$  s pravcima  $p$  i  $p'$ , ako se pravac  $p'$  dobiva rotacijom pravca

$$p \dots \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z}{2}$$

oko osi  $y$  za kut  $\pi/4$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\{S\} = \pi \cap p$ ,  $\{S'\} = \pi \cap p'$  i  $d(S, S') \approx 3,46$ .

**Zadatak 5.30** Zadana je matrica  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$  i vrhovi trokuta  $\triangle ABC$  s koordinatama  $A = (1, 1)$ ,  $B = (4, 1)$  i  $C = (1, 5)$ .

- Kako zovemo tip preslikavanja koje predstavlja matrica  $M$ ?
- Kolika je površina trokuta  $\triangle A'B'C'$ , ako su  $A'$ ,  $B'$  i  $C'$  slike vrhova trokuta  $\triangle ABC$ ?
- Dopušta li matrica  $M$  dijagonalizaciju?

**Rješenje.**

- Smicanje;
- $P_{\triangle A'B'C'} = 6$ ;
- Matrica  $M$  **ne** dopušta dijagonalizaciju!

**Zadatak 5.31** Neka je  $Z : \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{V}^2$  linearan operator zrcaljenja s obzirom na pravac  $y = (\tan \frac{\pi}{6})x$ . Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora  $Z$ .

**Rješenje.**

Matrični zapis operatora  $Z$  u kanonskoj bazi  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  je:  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ .

Svojstvene vrijednosti operatora  $Z$  su:  $\lambda_1 = 1$  i  $\lambda_2 = -1$ .

Svojstveni vektori operatora  $Z$  su:  $\vec{v}_1 = [3 \ \sqrt{3}]^T$ ,  $\vec{v}_2 = [-\sqrt{3} \ 3]^T$ .

**Zadatak 5.32** Odrediti svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore operatora (matrice)  $A^T A$  ako je:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dopušta li operator  $A^T A$  dijagonalizaciju?

**Rješenje.**

Vrijedi:  $\sigma(A^T A) = \{0, 4, 10\}$ ,  $v_1 = [1, 0, 1]^T$ ,  $v_2 = [0, 1, 0]^T$ ,  $v_3 = [1, 0, -1]^T$ .

Budući da je matrica  $A^T A$  **simetrična**<sup>60</sup> kvadratna matrica reda 3 (detalje prepuštamo čitatelju) i ima tri (3) **različite** svojstvene vrijednosti, operator  $A^T A$  se može dijagonalizirati.

**Zadatak 5.33** Neka je  $Q : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_2$  preslikavanje zadano s:

$$Q(p(t)) = \text{polinom stupnja dva čiji graf prolazi točkama } (-1, p(-1)), (0, p(0)), (1, p(1)).$$

Dokazati da je  $Q$  linearan operator. Može li se operator  $Q|_{\mathcal{P}_2}$  dijagonalizirati?

<sup>60</sup> U klasi simetričnih matrica inače vrijedi: **svi** svojstvene vrijednosti ovih matrica su **realne**, i dodatno su **svi** njihovi svojstveni vektori, koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima, **međusobno okomiti**!

**Rješenje.**

Operator  $Q$  je tzv. *operator interpolacije* u čvorovima  $-1, 0, 1$ .  $Q|_{\mathcal{P}_2}$  dopušta dijagonalizaciju.

Vrijedi:  $Q(p(t)) = Q(at^3 + bt^2 + ct + d) = bt^2 + (a+c)t + d \Rightarrow$  operator  $Q$  je linearan. ■

**Zadatak 5.34** Neka je  $T : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$  linearan operator zadan s:

$$T(p(t)) = tp'(t).$$

Pokazati da je  $T$  linearni operator. Zatim odrediti matrični zapis operatora  $T$  u kanonskoj bazi  $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ .

**Rješenje.**

Vrijedi:

$$T(p(t)) = tp'(t) = t(c + 2bt + 3at^2) = ct + 2bt^2 + 3at^3 \text{ (linearan operator),}$$

$$T_{[B,B]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.35** Neka je matrični prikaz linearnog operatora  $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  u kanonskoj bazi zadan s:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Odrediti sve  $x \in \mathbb{R}$  za koje linearni operator  $A$  dopušta dijagonalizaciju?

**Rješenje.**

Linearni operator  $A$  dopušta dijagonalizaciju **akko**  $x \notin \{-2, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\}$ . ■

**Zadatak 5.36** Naći dva niza  $(a_n), (b_n)$  za koje vrijedi:

$$a_{n+1} = a_n + 3b_n,$$

$$b_{n+1} = 2a_n + 2b_n,$$

ako je  $a_0 = 5$  i  $b_0 = -5$ .

**Rješenje.**

Napomena: zapisati zadani sustav linearnih rekurzija kao **matričnu rekurziju**<sup>61</sup>.  $\forall n \geq 0$  vrijedi:

$$a_n = -4^n + 6(-1)^n,$$

$$b_n = -4^n - 4(-1)^n.$$

<sup>61</sup> Rekurzija je metoda koja omogućuje definiranje nekog objekta, poput niza ili funkcije, pomoću njega samoga.

**Zadatak 5.37** Tim populacijskih ekologa istražuje populaciju zečeva i lasica. Došli su do zaključka kako je svake godine broj zečeva uvijek jednak četverostrukom broju zečeva prošle godine umanjenom za dvostruki broj lasica prošle godine. Nadalje, uočeno je kako je broj lasica jednak zbroju lanjskog broja zečeva i lanjskog broja lasica. Na početku je bilo 100 zečeva i 10 lasica. Naći broj zečeva i lasica nakon  $n$  godina.

**Rješenje.**

Uz oznake  $z_n$  – broj zečeva nakon  $n$  godina,  $l_n$  – broj lasica nakon  $n$  godina, i početne uvjete vrijedi:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= 4z_n - 2l_n, \\ l_{n+1} &= z_n + l_n, \\ z_0 &= 100, \\ l_0 &= 10. \end{aligned}$$

Gornji sustav linearnih rekurzija može se prikazati matričnom jednadžbom:

$$\begin{bmatrix} z_{n+1} \\ l_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} z_n \\ l_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} z_n \\ l_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} z_0 \\ l_0 \end{bmatrix},$$

gdje je  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Svojstvene vrijednosti matrice  $A$  lako nalazimo. Vrijedi:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

Pripadajući svojstveni vektori su  $\vec{v}_1 = [1, 1]^T$ ,  $\vec{v}_2 = [2, 1]^T$ . Sada, nije teško pokazati kako su ova dva svojstvena vektora **linearno nezavisna**, pa matrica sustava  $A$  dopušta dijagonalizaciju, koju provodi matrica  $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Konačno, dijagonalna matrica slična matrici  $A$  je:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

i vrijedi:

$$A = T \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} T^{-1} \Rightarrow A^n = T \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} T^{-1},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} z_n \\ l_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} T^{-1} \begin{bmatrix} z_0 \\ l_0 \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} 180 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \\ 90 \cdot 3^n - 80 \cdot 2^n \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.38** Tim morskih biologa prati populaciju dviju morskih vrsta: sitne ribe ( $f_n$ ) i morskih pasa ( $s_n$ ). Svake promatrane godine su brojevi sitne ribe i morskih pasa približno zadovoljavali sljedeći sustav linearnih rekurzija:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= 1,3f_n - 0,1s_n, \\ s_{n+1} &= 0,2f_n + 0,6s_n, \end{aligned}$$

Naći broj sitne ribe i morskih pasa nakon 10 godina, ako je **inicijalna** populacija zadana s:  $f_0 = 500$ ,  $s_0 = 30$ .

**Rješenje.**

Rješavamo sljedeći sustav linearnih rekurzija:

$$\begin{aligned}f_{n+1} &= 1,3f_n - 0,1s_n, \\s_{n+1} &= 0,2f_n + 0,6s_n, \\f_0 &= 500, \\s_0 &= 30.\end{aligned}$$

Gornji sustav može se prikazati matričnom jednadžbom:

$$\begin{bmatrix} f_{n+1} \\ s_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} f_n \\ s_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_n \\ s_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} f_0 \\ s_0 \end{bmatrix},$$

gdje je  $A = \begin{bmatrix} 1,3 & -0,1 \\ 0,2 & 0,6 \end{bmatrix}$ . Svojstvene vrijednosti matrice  $A$  lako nalazimo. Nadalje, jer su obje svojstvene vrijednosti realne i različite, matrica  $A$  dopušta dijagonalizaciju. Određivanje svojstvenih vektora i matrice  $T$  koja provodi dijagonalizaciju ostavljamo čitatelju za vježbu. Konačno, vrijedi:

$$\begin{bmatrix} f_{10} \\ s_{10} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5668 \\ 1690 \end{bmatrix}.$$

Dakle, nakon 10 godina obje populacije brzo rastu, posebno sitne ribe! Rast populacije morskih pasa održava se brzo rastućom ponudom ribe.

**Zadatak 5.39** Tim geodeta prati relativno pomicanje dviju tektonskih ploča u horizontalnoj ravni pomoću GPS-a. Neka je vektor  $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$  predstavlja položaj referentne točke na jednoj ploči u odnosu na drugu u godini  $n$ , mjeren u centimetrima. Zbog stabilnog gibanja ploče i male godišnje rotacijske deformacije, položaj se **linearno** mijenja svake godine prema **rekurzivnoj relaciji**:  $\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$ , gdje je matrica  $G$  zadana kao:

$$G = \begin{bmatrix} 1,02 & -0,01 \\ 0,01 & 0,99 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo kako je na početku promatranja (u godini  $n = 0$ ) relativni položaj bio:  $\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}$ .

Naći opći izraz za vektor  $\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$  pomoću **dijagonalizacije** matrice  $G$ .

**Rješenje.**

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = T D^n T^{-1} \begin{bmatrix} 100 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad T = [t_1, t_2] \approx \begin{bmatrix} 2,63 & 0,38 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,02 & 0 \\ 0 & 0,99 \end{bmatrix}.$$

**Zadatak 5.40** Tim urbanista želi odrediti na koliko se načina  $u_k$ , red od  $k$  parkirnih mjesta može popuniti automobilima i kamionima. Pretpostavimo kako automobili zauzimaju samo jedno parking mjesto, a kamioni po dva parking mjesta. Pomoću **dijagonalizacije** naći opći izraz (formulu) za broj načina  $u_k$  uređenja planiranog parking prostora za proizvoljni  $k \in \mathbb{N}$ .

**Rješenje.**

Očito vrijedi:  $u_1 = 1$  i  $u_2 = 2$  budući se red od 1–og parking mjesta može popuniti jednim automobilom, a red od 2 parking mjesta je moguće popuniti s dva automobila ili jednim kamionom. Nadalje, nije teško naći da je  $u_3 = 3$ ,  $u_4 = 5$  i  $u_5 = 8$ . Na primjer, za red od 3 parking mjesta, načini parkiranja su:  $\boxed{a} \boxed{a} \boxed{a}$ ,  $\boxed{a} \boxed{K}$  i  $\boxed{K} \boxed{a}$ . Dakle, dolazimo do sljedeće tvrdnje:

$$u_{k+2} = u_k + u_{k+1} \quad (\forall k \geq 1). \quad (\text{P})$$

Doista, svaki način popunjavanja reda od  $k + 2$  parking mjesta spada u jednu od dvije kategorije:

1. ili je automobil parkiran na prvo parking mjesto, pa je preostalih  $k + 1$  mjesta popunjeno na  $u_{k+1}$  načina;
2. ili je kamion parkiran na prva dva parking mjesta, pa je preostalih  $k$  mjesta popunjeno na  $u_k$  načina.

Stoga, postoji točno  $u_{k+1} + u_k$  načina na koji se red od  $k + 2$  parking mjesta može kompletirati automobilima i kamionima, pa je tvrdnja (P) istinita za svaki  $k \geq 1$ . Nadalje, jednostavno je zamijetiti

kako, uz oznaku  $v_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{bmatrix}$ , linearna rekurzija (P) postaje matrična rekurzija:

$$v_{k+1} = \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k + u_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = Av_k \quad (\text{za sve } k \geq 1),$$

gdje je  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Štoviše, lako je zaključiti kako matrica  $A$  dopušta dijagonalizaciju. Prvo, za odrediti svojstvene vrijednosti matrice  $A$  dovoljno je naći nul–točke njezina karakterističnog polinoma  $k_A(\lambda)$ . Vrijedi:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

dakle imamo:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \text{ i } \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

Zatim određujemo svojstvene vektore pridružene gornjim svojstvenim vrijednostima, odnosno tražimo netrivialna rješenja  $v$  homogenog sustava  $(A - \lambda I)v = 0$ . Pronalazimo kako su pripadajući svojstveni vektori  $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}$  i  $\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$  linearno nezavisni (dokaz ostavljamo čitatelju za vježbu), pa za matricu  $F$  koja provodi dijagonalizaciju matrice  $A$  vrijedi:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Na koncu, za  $v_k$  vrijedi:

$$v_k = \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \end{bmatrix} = \dots = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}} \lambda_1^k \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}} \lambda_2^k \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix},$$

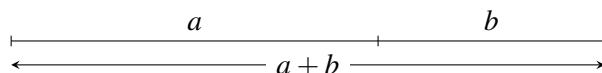
što rezultira s:

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} \right] \quad \text{za sve } k \geq 1,$$

odnosno nizom **cijelih** brojeva (načina uređenja planiranog parking prostora):

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, \dots \quad (\text{F})$$

kojeg prepoznamo kao **Fibonaccijev**<sup>62</sup> **niz** ( $F_n$ ). Ovaj niz se često pojavljuje u prirodi (na primjer, biolozi su otkrili kako raspored listova oko stabljika nekih biljaka slijedi Fibonaccijev obrazac), umjetnosti i arhitekturi, a povezan je s **zlatnim rezom**<sup>63</sup>. Posebno je vrijedno pažnje to što su  $u_k$  cijeli brojevi, za svaki  $k \geq 1$ , dok  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  nisu (čak su iracionalni brojevi)! Dodatno, omjer susjednih članova Fibonaccijeva niza  $\frac{F_{n+1}}{F_n}$  odgovara približnoj vrijednosti zlatnog reza ( $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618$ ), to je bliže točnoj vrijednosti što su članovi niza veći.



**Slika 5.1:** Dužina  $a + b$  ( $a > b$ ) u omjeru zlatnog reza,  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi$ .

**Zadatak 5.41** Odrediti **zatvorenu** formulu za Lucasov<sup>64</sup> niz ( $L_n$ ), koji se definira rekurzivno kao:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1,$$

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad \text{za } n \geq 2. \quad (\text{L})$$

**Rješenje.**

Za  $n \geq 0$  vrijedi:  $L_n = \varphi^n + \bar{\varphi}^n$ , gdje je  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $\bar{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

**Napomena (veza s Fibonaccijevim nizom):** Lucasov niz ( $L_n$ ) prati isto pravilo rekurzije, a prvih nekoliko članova glasi: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ... Za svaki  $n \geq 1$  vrijedi **fundamentalna veza** s Fibonaccijevim nizom:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \quad (\text{L-F})$$

Kao i kod Fibonaccijeva niza, omjer susjednih članova  $\frac{L_{n+1}}{L_n}$  s porastom  $n$  konvergira prema zlatnom rezu ( $\varphi \approx 1,618$ ).

**Zadatak 5.42** Pokazati da je linearni operator  $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  zadan u kanonskoj bazi matricom:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

defektan (ne dopušta dijagonalizaciju).

<sup>62</sup> Leonardo Fibonacci, talijanski matematičar, oko 1170. – nakon 1240.

<sup>63</sup> Zlatni rez (lat. *sectio aurea*, ili božanski omjer) je omjer dijelova neke dužine kod kojega se cijela dužina  $a + b$  odnosi prema većem dijelu  $a$  kao što se veći dio  $a$  odnosi prema manjemu  $b$ , odnosno  $(a + b) : a = a : b = \varphi$ ,  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ .

<sup>64</sup> François Édouard Anatole Lucas, francuski matematičar, 1842.–1891.

**Rješenje.**

Najprije rješavamo karakterističnu jednažbu:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

čija rješenja su svojstvene vrijednosti  $\lambda_i$  operatora  $A$ .

Vrijedi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2.$$

Dakle, zadani operator  $A$  ima samo **dvije** različite svojstvene vrijednosti: svojstvena vrijednost  $\lambda_1 = 3$  je **jednostruka**, dok je svojstvena vrijednost  $\lambda_2 = 2$  **dvostruka**.

Za  $\lambda_1 = 3$  rješavamo **homogeni** sustav:  $(A - 3I)v = 0$ ,  
i dobivamo prvi svojstveni vektor  $v_1 = [1, 1, -2]^T$ .

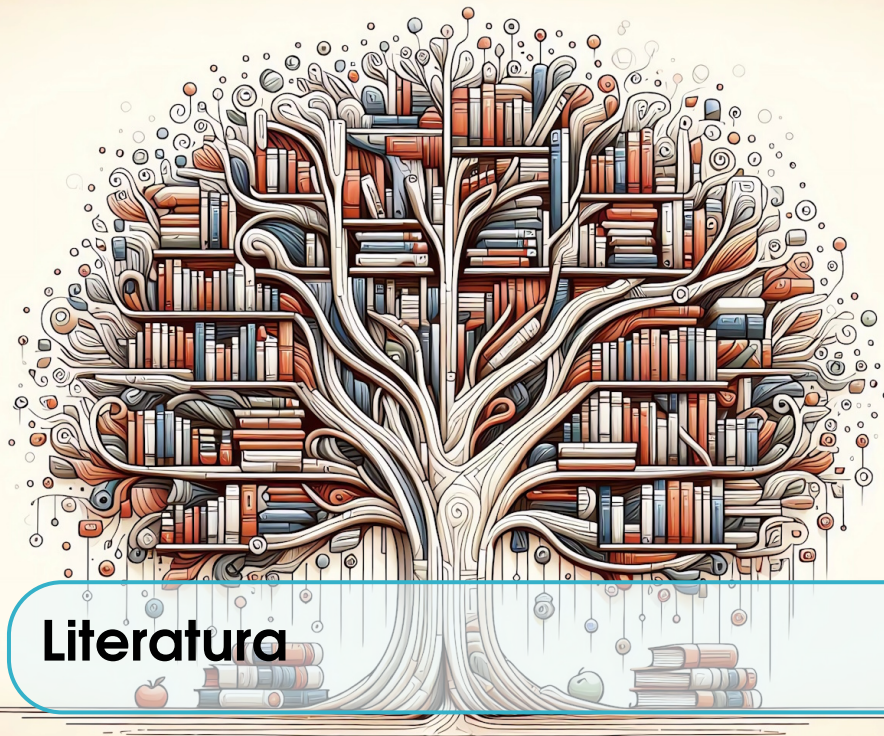
Slično, za  $\lambda_2 = 2$  rješavamo **homogeni** sustav:  $(A - 2I)v = 0$ ,  
i dobivamo još samo **jedan** svojstveni vektor  $v_2 = [1, 0, 0]^T$ .

Konačno, nije teško pokazati da su ova dva svojstvena vektora linearno nezavisna. Stoga, linearni operator  $A$  zadan matricom  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  **ne dopušta** dijagonalizaciju jer nema  $n$  (u ovom slučaju 3) linearno nezavisna svojstvena vektora. Dakle, pokazano je da je zadani linearni operator defektan (manjkav) i ne dopušta dijagonalizaciju!

**Napomena:** U domaćoj literaturi se za linearni operator koji ne dopušta dijagonalizaciju (jer nema dovoljno linearno nezavisnih svojstvenih vektora) koristi naziv **defektan** ili **manjkav operator**. Važno je ne miješati ovaj pojam s pojmom *defekta operatora* (dimenzije jezgre  $\dim(\ker A)$ ), kojeg zbog ograničenog opsega nećemo detaljnije definirati jer bi to prešlo okvire ovog udžbenika.







## Literatura

- [1] Anton, H., Kaul, A., *Elementary Linear Algebra*, Wiley, Hoboken, 2019.
- [2] Bakić, D., *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.
- [3] Bakić, N., Milas, A., *Zbirka zadataka iz linearne algebre s rješenjima*, PMF Zagreb, Zagreb, 1996.
- [4] Červar, B., Miletić, K., *Matematika 1: skripta s riješenim zadacima*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Mostaru, Mostar, 2014.
- [5] Elezović, N., *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2016.
- [6] Elezović, N., Aglič Aljinović, A., *Linearna algebra: zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2006.
- [7] Kvesić, Lj., *Matematika 1: udžbenik s riješenim zadacima*, Sveučilište u Mostaru, Mostar, 2017.
- [8] Lay, D. C., Lay, S. R., McDonald, J. J., *Linear Algebra and Its Applications*, Pearson, London, 2021.
- [9] Maksimović, S., Kosić-Jeremić, S., Đurić, N., *Linearna algebra i analitička geometrija za studente tehničkih fakulteta*, Arhitektonsko-građevinsko-geodetski fakultet Univerziteta u Banjoj Luci, Banja Luka, 2018.
- [10] Meyer, C. D., *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2007.
- [11] Sedlar, J., *Analitička geometrija i linearna algebra*, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, Split, 2016.
- [12] Slapničar, I., *Matematika 1*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2002.
- [13] Slapničar, I., Barić, J., Mirošević, I., *Matematika 1: zbirka zadataka*, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje u Splitu, Split, 2010.
- [14] Strang, G., *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 2016.





## Kazalo imena

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| BINET, J. P. M., francuski matematičar i astronom (1786.–1856.)                       | 112 |
| CAPELLI, A., talijanski matematičar (1855.–1910.)                                     | 140 |
| CAUCHY, A. L., francuski matematičar (1789.–1857.)                                    | 112 |
| CAYLEY, A., britanski matematičar (1821.–1895.)                                       | 119 |
| CRAMER, G., švicarski matematičar (1704.–1752.)                                       | 145 |
| DESCARTES (CARTESIUS), R., francuski filozof i matematičar (1596.–1650.)              | 17  |
| EUKLID (Εὐκλείδης), grčki matematičar (oko 330. prije Krista – oko 275. prije Krista) | 60  |
| FIBONACCI, L., talijanski matematičar (oko 1170. – nakon 1240.)                       | 200 |
| GAUSS, C. F., njemački matematičar i astronom (1777.–1855.)                           | 107 |
| HAMILTON, W. R., irski matematičar i fizičar (1805.–1865.)                            | 119 |
| HESSE, L. O., njemački matematičar (1811.–1874.)                                      | 51  |
| HILBERT, D., njemački matematičar (1862.–1943.)                                       | 136 |
| HOËNÉ-WROŃSKI (ili WROŃSKI), J. M., poljski filozof i matematičar (1776.–1853.)       | 137 |
| JACOBI, C. G., njemački matematičar (1804.–1851.)                                     | 21  |



|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| JORDAN, W., njemački geodet i matematičar (1842.–1899.) .....                           | 142 |
| KAŠI, M. al-, perzijski matematičar i astronom (oko 1380.–1429.) .....                  | 39  |
| KIRCHHOFF, G. R., njemački fizičar (1824.–1887.) .....                                  | 169 |
| KRONECKER, L., njemački matematičar (1823.–1891.) .....                                 | 100 |
| LAGRANGE, J. L., talijansko–francuski matematičar i astronom (1736.–1813.) .....        | 21  |
| LAPLACE, P. S., francuski matematičar i astronom (1749.–1827.) .....                    | 110 |
| LUCAS, F. É. A., francuski matematičar (1842.–1891.) .....                              | 200 |
| PITAGORA (Πυθαγόρας), grčki filozof i matematičar (oko 570. – oko 495. prije Krista) .. | 39  |
| PTOLEMEJ (Πτολεμαῖος), K., grčki matematičar i astronom (oko 85. – oko 165.) .....      | 48  |
| ROUCHÉ, E., francuski matematičar (1832.–1910.) .....                                   | 146 |
| SARRUS, P. F., francuski matematičar (1798.–1861.) .....                                | 111 |
| STEINITZ, E., njemački matematičar (1871.–1928.) .....                                  | 176 |



## Kazalo pojmova

### A

algebarski komplement (kofaktor) ..... 110

### B

baza prostora  $\mathbb{V}^3$  ..... 16

Binet–Cauchyjev teorem ..... 112

### C

Cramerovo pravilo ..... 145

### D

determinanta ..... 109

    determinanta Wronskog ..... 137

    osnovna svojstva ..... 112

    poddeterminanta ..... 114

    računanje inverzne matrice ..... 113

dijeljenje dužine u zadanom omjeru ..... 48

    koordinate polovišta dužine ..... 49

### F

Fibonaccijev niz ..... 136, 200

funkcija signum ..... 56

### G

Gauss–Jordanova metoda eliminacije ... 142

Gaussov algoritam za invertiranje matrice 107

Gaussova metoda eliminacije ..... 142

    algoritam ..... 142

    pseudokod ..... 143

### H

Hamilton–Cayleyjev teorem ..... 119

Hilbertova matrica ..... 136

### J

Jacobijev identitet ..... 21

**K**

koordinate težišta sustava materijalnih točaka  
u prostoru ..... 50  
koordinatizacija prostora  $\mathbb{V}^3$  ..... 16  
kosinsov poučak ..... 39  
Kronecker–Capellijev teorem ..... 140  
Kroneckerov delta simbol ..... 100

**L**

Lagrangeov identitet ..... 21  
Laplaceov razvoj determinante ..... 110  
linearni ili vektorski prostori ..... 173  
baza linearnog prostora ..... 176  
dimenzija linearnog prostora ..... 175  
linearni operatori ..... 177  
algebra operatora, 179  
defektni operatori, 184, 201  
dijagonalizacija operatora, 182  
homotetija ravnine, 185  
horizontalno smicanje, 185  
identični operator, 180  
inverz linearnog operatora, 180  
karakteristična jednadžba operatora,  
181  
karakteristični polinom operatora, 181  
kompozicija linearnih operatora, 177  
minimalni polinom operatora, 182  
odnos matičnih zapisa istog operatora,  
179  
operator centralne simetrije (u ravnini),  
185  
operator deriviranja, 191  
operator interpolacije, 196  
operator rotacije (u prostoru), 186  
operator rotacije (u ravnini), 185  
operator simetrije (u prostoru), 186  
operator simetrije (u ravnini), 178, 185  
prikaz linearnog operatora matricom,  
177  
primjeri operatora u ravnini i prostoru,  
185

regularni operatori, 179  
singularni operatori, 179  
spektar operatora, 181  
svojstvena vrijednost operatora, 181  
svojstveni vektor operatora, 181  
vertikalno smicanje, 185  
zakošenje ravnine, 185  
linearni potprostor ..... 174  
najvažniji primjeri linearnih prostora 173  
linearni sustavi ..... 139  
Cramerovi sustavi ..... 145  
desna strana sustava ..... 139  
ekvivalentni sustavi ..... 140  
homogeni linearni sustavi ..... 146  
kvadratni sustavi ..... 145  
matrica (koeficijenata) sustava ..... 139  
neodređen sustav ..... 140  
određen sustav ..... 140  
proširena matrica sustava ..... 140  
reducirani sustavi ..... 140  
rješavanje kvadratnog linear. sustava 145  
rješavanje općenitog linear. sustava . 140  
rješenje sustava ..... 139  
beskonačno mnogo, 140  
jedinstveno, 140  
netrivijalno, 146  
trivijalno, 146  
vektor nepoznanica ..... 139  
vektor slobodnih članova (koeficijenata)  
139  
Lucasov niz ..... 200

**M**

matičin rang ..... 114  
matične jednadžbe ..... 108  
linearne matične jednadžbe s  
kvadratnim matricama ..... 108  
linearne matične jednadžbe s  
pravokutnim matricama ..... 109  
matrica ..... 99  
(anti)simetrične matrice ..... 101  
adjunkta matrice ..... 113  
blok matrica ..... 107  
dijagonala matrice ..... 99

|                                              |     |
|----------------------------------------------|-----|
| dijagonalne matrice . . . . .                | 100 |
| ekvivalentne matrice . . . . .               | 106 |
| elementarne transformacije matrice . . . . . | 106 |
| inverzna matrica . . . . .                   | 105 |
| jedinična matrica . . . . .                  | 100 |
| jednakost matrica . . . . .                  | 100 |
| karakteristična jednačba . . . . .           | 118 |
| karakteristična matrica . . . . .            | 118 |
| karakteristični polinom . . . . .            | 118 |
| konjugiranje matrica . . . . .               | 106 |
| kvadratna matrica . . . . .                  | 100 |
| determinanta, 109                            |     |
| puni rang, 115                               |     |
| kvadratne matrice . . . . .                  | 100 |
| anti-involutivna, 105                        |     |
| idempotentna, 105                            |     |
| involutivna, 105                             |     |
| nilpotentna, 105                             |     |
| linearna kombinacija matrica . . . . .       | 102 |
| netrivijalna, 102                            |     |
| trivijalna, 102                              |     |
| linearna nezavisnost matrica . . . . .       | 102 |
| minimalna jednačba . . . . .                 | 120 |
| minimalni polinom . . . . .                  | 120 |
| nul-matrica . . . . .                        | 100 |
| odnos matičnih zapisa istog operatora        |     |
| 179                                          |     |
| operacije s matricama . . . . .              | 101 |
| matični polinom, 104                         |     |
| matično oduzimanje, 102                      |     |
| množenje matrica, 103                        |     |
| monoženje matrice skalarom, 101              |     |
| umnožak vektor–retka i vektor–stupca,        |     |
| 103                                          |     |
| zbrajanje matrica, 101                       |     |
| poddeterminanta matrice . . . . .            | 114 |
| podmatrice . . . . .                         | 114 |
| prikaz linearnog operatora matricom          | 177 |
| rang matrice . . . . .                       | 115 |
| reducirani oblik (forma) . . . . .           | 116 |
| regularne matrice . . . . .                  | 105 |
| retčana matrica . . . . .                    | 100 |
| singularna matrica . . . . .                 | 105 |
| stupčana matrica . . . . .                   | 100 |
| suprotna matrica . . . . .                   | 102 |
| svojstvena (vlastita) vrijednost . . . . .   | 117 |

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| svojstveni vektor . . . . .     | 117 |
| tip matrice . . . . .           | 99  |
| transponirana matrica . . . . . | 100 |
| trokutaste matrice . . . . .    | 100 |
| donja trokutasta matrica, 100   |     |
| gornja trokutasta matrica, 100  |     |
| ulančane matrice . . . . .      | 103 |
| minora . . . . .                | 110 |
| minora reda $k$ . . . . .       | 110 |

## N

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| nejednakost trokuta . . . . . | 14 |
|-------------------------------|----|

## O

|                                                    |    |
|----------------------------------------------------|----|
| odnos pravca i ravnine u prostoru $E^3$ . . . . .  | 63 |
| kut između pravca i ravnine . . . . .              | 63 |
| presjek pravca i ravnine . . . . .                 | 64 |
| uvjet okomitosti pravca i ravnine . . . . .        | 63 |
| uvjet paralelnosti pravca i ravnine . . . . .      | 63 |
| oktant prostora $E^3$ . . . . .                    | 48 |
| ortogonalna projekcija pravca na ravninu . . . . . | 80 |
| ortogonalna projekcija točke na ravninu . . . . .  | 80 |
| os aplikata . . . . .                              | 17 |
| os apscisa . . . . .                               | 17 |
| os ordinata . . . . .                              | 17 |
| os sveska . . . . .                                | 80 |

## P

|                                            |                |
|--------------------------------------------|----------------|
| paralelopiped . . . . .                    | 23             |
| volumen paralelopipeda . . . . .           | 23, 24         |
| površina paralelograma . . . . .           | 20             |
| površina romba . . . . .                   | 33             |
| površina trapeza . . . . .                 | 29             |
| površina trokuta . . . . .                 | 22, 37, 38, 92 |
| pravac u prostoru $E^3$ . . . . .          | 58             |
| jednačba pravca kroz dvije točke . . . . . | 60             |
| kanonske jednačbe pravca $p$ . . . . .     | 59             |
| kanonske jednačbe pravca kroz dvije        |                |
| točke . . . . .                            | 60             |
| kut između dva pravca . . . . .            | 61             |

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| najkraća udaljenost dvaju mimoilaznih<br>(mimosmjernih) pravaca . . . . .   | 62  |
| opće jednadžbe pravca . . . . .                                             | 61  |
| osnovni oblik jednadžbe pravca . . . . .                                    | 58  |
| pramen pravaca . . . . .                                                    | 61  |
| pravac kao presječnica dviju ravnina .                                      | 60  |
| skalarni oblik parametarske jednadžbe<br>pravca . . . . .                   | 58  |
| skalarni oblik parametarske jednadžbe<br>pravca kroz dvije točke . . . . .  | 60  |
| snop pravaca . . . . .                                                      | 61  |
| udaljenost točke od pravca . . . . .                                        | 61  |
| uvjet okomitosti dvaju pravaca . . . . .                                    | 61  |
| uvjet paralelnosti dvaju pravaca . . . . .                                  | 61  |
| uvjet presijecanja dvaju pravaca . . . . .                                  | 63  |
| uvjet za komplanarnost dvaju pravaca                                        | 63  |
| vektorski oblik parametarske jednadžbe<br>pravca . . . . .                  | 58  |
| vektorski oblik parametarske jednadžbe<br>pravca kroz dvije točke . . . . . | 60  |
| pravokutni (Kartezijev) koordinatni sustav                                  | 17, |
| 47                                                                          |     |
| ishodište koordinatnog sustava . . . . .                                    | 47  |
| koordinatne osi . . . . .                                                   | 47  |
| koordinatne ravnine . . . . .                                               | 47  |
| prostor radij–vektora . . . . .                                             | 12  |

## R

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| ravnina u prostoru $E^3$ . . . . .                                      | 50 |
| jednadžba pravca (sveska) ravnina .                                     | 54 |
| jednadžba ravnine kroz dvije točke,<br>paralelna pravcu . . . . .       | 54 |
| jednadžba ravnine kroz jednu točku,<br>paralelna s dva pravca . . . . . | 54 |
| jednadžba ravnine kroz tri točke . . . . .                              | 53 |
| jednadžba snopa (svežnja) ravnina . .                                   | 54 |
| jednadžbe ravnina kroz presječnicu dviju<br>ravnina . . . . .           | 54 |
| kut između dviju ravnina . . . . .                                      | 55 |
| normalni ili Hesseov oblik jednadžbe<br>ravnine . . . . .               | 51 |
| opći skalarni oblik jednadžbe ravnine                                   | 51 |
| konstanta ravnine, 51                                                   |    |
| opći vektorski oblik jednadžbe ravnine                                  | 51 |

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| osnovni oblik jednadžbe ravnine . . . . .  | 51  |
| presječnica ravnina . . . . .              | 54  |
| segmentni oblik jednadžbe ravnine .        | 52  |
| snop (svežanj) ravnina . . . . .           | 54  |
| udaljenost dviju paralelnih ravnina . .    | 56  |
| udaljenost točke od ravnine . . . . .      | 56  |
| uvjet jednakosti dviju ravnina . . . . .   | 51  |
| uvjet okomitosti dviju ravnina . . . . .   | 55  |
| uvjet paralelnosti dviju ravnina . . . . . | 56  |
| rekurzije                                  |     |
| matrice rekurzije . . . . .                | 196 |
| sustav linearnih rekurzija . . . . .       | 196 |
| Roucheov teorem . . . . .                  | 146 |

## S

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| Sarrusovo pravilo . . . . .                    | 111 |
| skalarne veličine . . . . .                    | 11  |
| spektar kvadratne matrice . . . . .            | 117 |
| spektralni radijus kvadratne matrice . . . . . | 117 |
| Steinitzov teorem . . . . .                    | 176 |
| stožer (pivot) retka . . . . .                 | 116 |
| stožerni (pivotni) stupac . . . . .            | 116 |

## T

|                                        |        |
|----------------------------------------|--------|
| težišnica tetraedra . . . . .          | 41     |
| težišnica trokuta . . . . .            | 40     |
| težište tetraedra . . . . .            | 40, 41 |
| težište trokuta . . . . .              | 26, 96 |
| točka u prostoru $E^3$ . . . . .       | 47     |
| koordinate točke . . . . .             | 47     |
| udaljenost dviju točaka u prostoru . . | 48     |
| Ptolemejeva nejednakost, 48            |        |
| relacija trokuta, 48                   |        |
| trag kvadratne matrice . . . . .       | 100    |

## U

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| usmjerena (orijentirana) dužina . . . . . | 11 |
| duljina . . . . .                         | 11 |
| ekvivalentne usmjerene dužine . . . . .   | 11 |
| kraj (šiljak) . . . . .                   | 11 |
| početak . . . . .                         | 11 |

**V**

|                                        |            |
|----------------------------------------|------------|
| vektor .....                           | 12, 173    |
| duljina .....                          | 12         |
| jedinичni vektor .....                 | 13         |
| jednakost vektora .....                | 12         |
| kolinearni vektori .....               | 13         |
| uvjet kolinearnosti, 18, 20            |            |
| komplanarni vektori .....              | 13         |
| uvjet komplanarnosti, 23               |            |
| koordinate vektora .....               | 16         |
| koordinatni slog .....                 | 16         |
| koordinatni vektori .....              | 16         |
| kut između vektora .....               | 13, 19, 39 |
| linearna (ne)zavisnost vektora .....   | 15         |
| linearna kombinacija vektora ...       | 15, 174    |
| netrivijalna, 16, 175                  |            |
| trivijalna, 15, 175                    |            |
| linearno (ne)zavisan skup vektora. ... | 174        |
| matrični prikaz vektora u bazi $B$ ... | 176        |
| mješoviti produkt vektora .....        | 23         |
| geometrijsko značenje, 24              |            |
| množenje vektora skalarom .....        | 15         |
| nul-vektor .....                       | 13         |
| okomiti vektori .....                  | 13         |
| orijentacija .....                     | 12         |
| prikloni kutovi .....                  | 51, 52, 78 |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| radij-vektor točke .....        | 12         |
| razlika vektora .....           | 14         |
| skalarna projekcija .....       | 20         |
| skalarni produkt vektora .....  | 18         |
| smjer .....                     | 12         |
| suprotan vektor .....           | 14         |
| uvjet okomitosti .....          | 19         |
| uvjet paralelnosti .....        | 19         |
| vektor normale ravnine .....    | 50         |
| vektor smjera pravca .....      | 58         |
| vektor-redak .....              | 100        |
| vektor-stupac .....             | 100        |
| vektorska projekcija .....      | 20         |
| vektorski produkt vektora ..... | 20         |
| zbroj vektora .....             | 13         |
| pravilo paralelograma, 13       |            |
| pravilo trokuta, 13             |            |
| vektorske veličine .....        | 11         |
| volumen tetraedra .....         | 25, 36, 50 |

**W**

|                  |     |
|------------------|-----|
| Wronskijan ..... | 137 |
|------------------|-----|

**Z**

|                  |     |
|------------------|-----|
| zlatni rez ..... | 200 |
|------------------|-----|





PRES 

# VRDOLJAK

ANALIČKA GEOMETRIJA I LINEARNA ALGEBRA